Examen final L3 *Année 2024/2025*

Cours Systèmes dynamiques et analyse numérique

Aucun document autorisé

Durée : 3 heures

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction dans l'évaluation des copies.

Les parties I, II et III sont indépendantes.

On considère l'EDO suivante pour deux paramètres réels $D > 0$ et $A > 0$:

$$\begin{cases} (E) & x'(t) = Dx(t)\Big(A - x(t)\Big), \quad t > 0 \\ (C) & x(0) = \bar{x}_0 > 0. \end{cases}$$

Partie I : Les réponses aux questions de 1 à 5 ne doivent pas utiliser l'expression de la solution calculée à la question 6.

(1) Quelles sont les solutions singulières (encore appelées points d'équilibre) de l'EDO (E) ?

(2) Montrer que si $0 < \bar{x}_0 < A$, alors la solution $\bar{x}(t)$ de l'EDO "(E) + (C)" vérifie

$$0 < \bar{x}(t) < A \text{ pour tous } t > 0.$$

(3) En utilisant un théorème du cours, déduire de la question précédente que, si $0 < \bar{x}_0 < A$, la solution de "(E)+(C)" est définie sur $\mathbb{R}^+$ tout entier.

(4) Montrer que si $0 < \bar{x}_0 < A$, alors la solution $\bar{x}(t)$ de l'EDO "(E) + (C)" est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

(5) Montrer que si $0 < \bar{x}_0 < A$, alors la solution $\bar{x}(t)$ de l'EDO "(E) + (C)" converge vers A pour $t \to +\infty$.

(6) Soit $0 < \bar{x}_0 < A$, calculer la solution $\bar{x}(t)$ de "(E) + (C)". On utilisera la décomposition

$$\frac{1}{Dx(A-x)} = \frac{1}{DA}\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{A-x}\Big).$$

Partie II

On considère dans cette question et les suivantes le schéma d'Euler explicite défini par $x_0 > 0$ donné et

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t_k} = Dx_k(A - x_k), \qquad k \geq 0,$$

avec un pas de temps variable $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k > 0$ et le temps initial $t_0 = 0$.

(7) Démontrer que

$$x_{k+1} = \Big(1 + D\Delta t_k(A - x_k)\Big)x_k$$

(8) Démontrer que
$$A - x_{k+1} = \Big(1 - Dx_k \Delta t_k\Big)(A - x_k)$$

(9) Trouver une condition sur le pas de temps Δt_k telle que si $0 < x_k < A$, alors on a nécéssairement $0 < x_{k+1} < A$. Démontrer que si cette condition sur le pas de temps Δt_k est satisfaite alors $x_{k+1} > x_k$.

(10) On suppose dans cette question que $\Delta t_k \geq \Delta t > 0$ pour tous $k \geq 0$. On suppose vérifiée pour tous $k \geq 0$ la condition sur le pas de temps de la question précédente. Démontrer que, si $0 < x_0 < A$, alors la suite $(x_k)_{k\geq 0}$ est strictement croissante et converge vers une limite telle que $0 < y \leq A$. En déduire ensuite en utilisant le schéma que $y = A$.

Partie III

On considère dans cette question et les suivantes le schéma numérique semi-implicite défini par $x_0 > 0$ donné et
$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = Dx_k(A - x_{k+1}), \qquad k \geq 0,$$
avec un pas de temps constant $\Delta t > 0$ et les temps discrets $t_k = k\Delta t$.

(11) Montrer que
$$x_{k+1} = \left(\frac{1 + DA\Delta t}{1 + Dx_k\Delta t}\right)x_k$$
et aussi que
$$A - x_{k+1} = \frac{1}{1 + Dx_k\Delta t}(A - x_k).$$

(12) Montrer que si $x_0 > 0$ alors $x_k > 0$ pour tous $k \geq 0$. On montrera que si la propriété est vraie pour x_k alors elle est vraie pour x_{k+1}.

(13) Montrer que si $0 < x_0 < A$ alors $0 < x_k < A$ pour tous $k \geq 0$. On utilisera la question précédente et on montrera que si la propriété est vraie pour x_k alors elle est vraie pour x_{k+1}.

(14) Montrer que si $0 < x_0 < A$ alors la suite $(x_k)_{k\geq 0}$ est strictement croissante.

(15) Montrer que si $0 < x_0 < A$, la suite $(x_k)_{k\geq 0}$ converge vers une limite notée y telle que $0 < y \leq A$. En déduire ensuite en utilisant le schéma que $y = A$.

(16) On se place sur l'intervalle $[0, T]$ et on fixe $m \in \mathbb{N}^*$. Le pas de temps constant est défini par $\Delta t = \frac{T}{m}$ et les temps discrets par $t_k = k\Delta t$ pour $k = 0, \cdots, m$. On cherche à estimer l'erreur de consistance du schéma définie par
$$r_k = \frac{\bar{x}(t_{k+1}) - \bar{x}(t_k)}{\Delta t} - D\bar{x}(t_k)\Big(A - \bar{x}(t_{k+1})\Big),$$
où $\bar{x}(t)$ est la solution exacte de "(E)+(C)".

En effectuant un développement limité de $\bar{x}(t_{k+1}) = \bar{x}(t_k + \Delta t)$ au temps t_k avec un reste à l'ordre $(\Delta t)^2$, montrer que l'erreur de consistance vérifie $|r_k| \leq C\Delta t$ avec C indépendant de Δt mais pouvant dépendre de la solution $\bar{x}$ et de T.

Examen partiel du cours L3 Systèmes Dynamiques et Analyse Numérique. Aucun document autorisé. Durée 2h.

Exercice 1 : on considère l'EDO

$$\begin{cases} (E) & x'(t) = \frac{2t}{t^2+1}x(t) + 1, \\ (C) & x(0) = 1. \end{cases}$$

On note (Eh) l'EDO homogène associée à (E)

$$(Eh) \quad x'(t) = \frac{2t}{t^2+1}x(t).$$

(1) En invoquant les théorèmes vus en cours, que pouvez vous dire sans calculs (i) de l'ensemble des solutions de l'EDO homogène (Eh) et (ii) des solutions de (E) + (C) ?

(2) Calculer l'ensemble des solutions de (Eh)

(3) En utilisant la méthode de variation de la constante, calculer une solution particulière de (E) et en déduire l'ensemble des solutions de (E). On rappelle que la dérivée de $\arctan(x)$ est $\frac{1}{x^2+1}$

(4) Déduire de la question (3) la solution de (E)+(C).

Exercice 2 : on considère le système d'EDOs linéaires à coefficients constants suivant

$$(Eh) \quad x'(t) = Ax(t),$$

en dimension $n = 2$ avec $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Que pouvez vous dire d'après le cours de l'ensemble des solutions de (Eh) ? Quel est l'unique solution singulière (ou point d'équilibre) de (Eh) ? Est ce que ce point d'équilibre est stable ou instable ?

(2) Calculer l'ensemble des solutions $x_2(t)$

(3) En utilisant la question précédente, calculer l'ensemble des solutions $x_1(t)$

(4) Déduire des questions (2) et (3) une base de solutions de (Eh) et déterminer la solution vérifiant la condition de Cauchy $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

Exercice 3 : on considère l'équation du second ordre à coefficients constants

$$(Eh) \quad x''(t) + 2x'(t) = 0.$$

(1) Déterminer l'ensemble des solutions de (Eh)

(2) Calculer la solution de (Eh) vérifiant la condition de Cauchy $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Evaluation L3 Mathématiques appliquées
Analyse de données
Durée: 3h00

Cette évaluation permettra aux étudiants de déployer des techniques d'analyse de données et d'apprentissage automatique tout en mettant en pratique leurs compétences en programmation R.

Exercice 1 : Analyse en Composantes Principales (ACP)

Jeu de données : *Wine Quality Dataset*

- **Description** : Ce jeu de données contient des informations sur les caractéristiques chimiques de différents vins rouges et blancs, ainsi que leur qualité (note de 0 à 10).
- **Source** : Disponible sur UCI Machine Learning Repository.
- **Utilisation** :
  - Les variables chimiques (comme l'acidité, le pH, le taux d'alcool) peuvent être utilisées pour effectuer une ACP.
  - Les étudiants peuvent analyser les contributions des variables et des individus pour identifier des regroupements ou des tendances.

1. **Préparation des données :**
   - Charger le jeu de données.
   - Identifier et traiter les données manquantes (imputation si nécessaire).
   - Standardiser les variables si elles sont sur des échelles différentes.
2. **Réalisation de l'ACP :**
   - Effectuer une ACP sur les données standardisées.
   - Déterminer le nombre d'axes principaux à retenir (critères : éboulis des valeurs propres, seuil de variance expliquée).
3. **Visualisation et interprétation :**
   - Représenter graphiquement les individus et les variables sur les axes principaux.
   - Analyser la contribution des individus et des variables aux axes principaux.
   - Interpréter les résultats pour identifier des regroupements ou des tendances.

Exercice 2 : K-Means (Clustering non supervisé)

Jeu de données : *Iris Dataset*

- **Description** : Ce jeu de données classique contient des mesures de longueur et largeur des sépales et pétales de trois espèces de fleurs d'iris (*Iris setosa*, *Iris versicolor*, *Iris virginica*).
- **Source** : Intégré dans R (utilisez data(iris)).
- **Utilisation** :
  - Les étudiants peuvent appliquer K-Means pour regrouper les observations en clusters.

- Ils peuvent comparer les clusters obtenus avec les vraies étiquettes des espèces pour évaluer la performance.

1. **Préparation des données :**
   - Charger et nettoyer les données (imputation des données manquantes si nécessaire).
   - Diviser les données en un jeu d'entraînement et un jeu de test.
2. **Détermination de la valeur optimale de K :**
   - Utiliser des méthodes comme l'inertie intra-classe (méthode du coude) ou le coefficient de silhouette pour choisir le nombre optimal de clusters.
3. **Réalisation du K-Means :**
   - Appliquer l'algorithme K-Means sur le jeu d'entraînement.
   - Visualiser les clusters obtenus.
4. **Évaluation et interprétation :**
   - Calculer une matrice de confusion (si des étiquettes sont disponibles).
   - Tracer la courbe ROC (si applicable).
   - Interpréter les résultats et discuter des regroupements obtenus.

Exercice 3 : K plus proches voisins (k-NN)

Jeu de données : *Titanic Dataset*

- **Description** : Ce jeu de données contient des informations sur les passagers du Titanic, comme leur âge, sexe, classe, et s'ils ont survécu ou non. (**nous ne retiendros que ces variables**)
- **Source** : Disponible sur Kaggle.
- **Utilisation** :
  - Les étudiants peuvent prédire la survie des passagers en utilisant l'algorithme k-NN.
  - Ils peuvent diviser les données en jeu d'entraînement et de test, et évaluer la performance avec une matrice de confusion et une courbe ROC.

Les jeux de données de test et d'entrainement sont fournis sous forme de fichier csv

1. **Préparation des données :**
   - Charger et nettoyer les données (imputation des données manquantes si nécessaire).
   - Diviser les données en un jeu d'entraînement et un jeu de test.
2. **Détermination de la valeur optimale de K :**
   - Utiliser une validation croisée pour choisir la valeur optimale de K.
3. **Réalisation du k-NN :**
   - Appliquer l'algorithme k-NN sur le jeu d'entraînement.
   - Prédire les classes pour le jeu de test.
4. **Évaluation et interprétation :**
   - Calculer une matrice de confusion.
   - Tracer la courbe ROC et calculer l'AUC.
   - Interpréter les résultats et discuter de la performance du modèle.

Exercice 4 : Arbre de classification

Jeu de données : Titanic Dataset

- **Description** : Ce jeu de données contient des informations sur les passagers du Titanic, comme leur âge, sexe, classe, et s'ils ont survécu ou non. (**nous ne retiendros que ces variables**)
- **Source** : Disponible sur Kaggle.
- **Utilisation** :
  - Les étudiants peuvent prédire la survie des passagers en utilisant l'algorithme k-NN.
  - Ils peuvent diviser les données en jeu d'entraînement et de test, et évaluer la performance avec une matrice de confusion et une courbe ROC.

Les jeux de données de test et d'entrainement sont fournis sous forme de fichier csv

1. **Préparation des données :**
   - Charger et nettoyer les données (imputation des données manquantes si nécessaire).
   - Diviser les données en un jeu d'entraînement et un jeu de test.
2. **Construction de l'arbre :**
   - Construire un arbre de classification sur le jeu d'entraînement.
   - Élaguer l'arbre si nécessaire pour éviter le surapprentissage.
3. **Évaluation et interprétation :**
   - Calculer une matrice de confusion.
   - Tracer la courbe ROC et calculer l'AUC.
   - Interpréter les résultats et discuter de la performance du modèle.

Livrables attendus : (fichier Rmd + word)

1. Un rapport détaillé contenant :
   - La méthodologie suivie pour chaque exercice.
   - Les graphiques et tableaux produits.
   - Une interprétation claire des résultats.
2. Un script R bien documenté pour chaque exercice.

Evaluation Bases de données L3 Mathématiques

Durée : 3Heures

UL

Exercice 1 : Conception d'une base de données pour les stages en entreprise

Vous devez concevoir une base de données pour les stages en entreprises dans une formation universitaire. La base de données concerne seulement les stages d'une année universitaire mais elle conserve les informations de plusieurs années universitaires pour les entreprises et les enseignants. Les entreprises proposent des stages en décrivant ces stages par un sujet, une durée, une éventuelle rémunération. Une entreprise peut proposer plusieurs sujets de stages différents mais n'accueillera qu'un seul étudiant par convention de stage. Les étudiants contactent les entreprises. Evidemment chaque étudiant peut contacter plusieurs entreprises pour des propositions differentes ; il n'est pas interdit qu'un étudiant contacte plusieurs fois une même entreprise, a des dates differentes, pour une proposition de stage donnée. Les entreprises prennent rendez-vous avec les étudiants. Lors du rendez-vous, la proposition de stage est discutée ; seule la durée ne peut être modifiée. Si l'entreprise est intéressée par le profil d'un étudiant, le sujet définitif est établi. La proposition de stage devient alors un stage effectif, avec une convention de stage, qui donnera lieu `a la rédaction d'un mémoire. Une proposition de stage ne peut pas donner lieu `a plusieurs conventions. Si l'entreprise estime que le sujet doit être réalisé par plusieurs étudiants, elle publie plusieurs propositions de stage (elle est incitée a donner des sujets différents) ; si, pour un sujet, l'entreprise était éventuellement intéressée par plusieurs étudiants, elle publierait une nouvelle proposition de stage (a la limite en conservant le même sujet). Les étudiants effectuent un seul stage dans l'année universitaire. Le stage effectif doit etre encadre par un (et un seul) enseignant. L'enseignant effectue parfois une visite a l'entreprise durant le stage. Pour maintenir un contact entre l'entreprise et l'université, la base de données ne mémorise que le dernier enseignant qui a visité l'entreprise et la date de cette dernière visite.

Questions

1- Dessinez le modèle entité association.
2- Donnez le modèle logique des données correspondant au modèle entité association

Exercice 2 :

Soit le schéma de base de données relationnel suivant :

AGENCE (NumAgence, Nom, Ville)

CLIENT (NumClient, Nom, Ville, dateNaiss)

COMPTE (NumCompte, #NumAgence, #NumClient, Solde)

Ecrire les requêtes SQL suivantes :

1. Créer la table Compte avec les différentes contraintes sachant que le solde doit être obligatoirement >=0.

2. Liste les numéro des agences ayant des comptes-clients.

3. Afficher le solde moyen des comptes-clients des agences dont le solde moyen est > "10 000".

4. Afficher le nombre de clients habitant à "Tunis".

5. Afficher le nombre de clients n'ayant pas d'adresse.

6. Insérer le Client dont le numéro est 100 et de nom="Tunssi" avec son compte 2000 créé a l'agence numéro 5014 et de solde initial = 0.

7. Augmenter le solde de tous les comptes de l'agence numéro 5014 de "5%".

8. Afficher le total des comptes de chaque agence en commençant par le plus grand dont le nombre de client dépasse 10,

9. Supprimer de la relation Compte toutes les comptes vides.

10. Quel est le client le plus vieux.

11. Quel est le total des comptes du client numéro 100 à l'agence 5014.

12. Afficher les clients nés en mois d'octobre et qui habitent à 'nabeul' (ou bien 'NABEUL' et faite attention aux espaces) e dont le nom se termine par 'ed'.

Devoir de MERISE : Application de gestion de stock et de vente en ligne pour la société INX SARLU

Durée : 3 heures

Introduction

Dans le cadre de ce devoir, vous allez concevoir les schémas conceptuels d'une application de gestion de stock et de vente en ligne pour la société INX SARLU.

Partie 1 : Analyse des besoins

1. Décrivez brièvement les activités principales de la société INX SARLU et les besoins spécifiques en matière de gestion de stock.
2. Identifiez et listez les acteurs impliqués dans le système de gestion décrit.
3. Identifiez et listez les sous-domaines.

Partie 2 : conception

1. Réalisez le graphe des flux.
1. Réalisez le dictionnaire de données, MCD et le MCT.
2. Convertissez le MCD en MLD, en identifiant les tables, les clés primaires et les clés étrangères.

Partie 3 : Conclusion

1. Résumez les principales étapes de conception de l'application de gestion demandé par INX SARLU.
2. Identifiez les éventuels défis ou contraintes rencontrés lors de la conception et proposez des solutions potentielles.

ANNEXE

Cahier des charges : Application de gestion de stock et e-commerce pour INX SARLU

La société INX SARLU souhaite développer une application de gestion de stock pour optimiser la gestion de ses produits et avoir une interface pour faciliter la vente en ligne. Ce cahier des charges détaille les fonctionnalités requises, les exigences techniques et les contraintes à respecter pour la réalisation de l'application.

L'application de gestion de stock doit permettre à la société INX SARLU de :

- Suivre en temps réel les niveaux de stock de ses produits.
- Gérer les entrées et les sorties de stock de manière efficace.
- Effectuer des commandes fournisseurs en fonction des besoins prévus.
- Analyser les données de stock pour optimiser les processus de gestion.
- Vendre ses produits en ligne de manière efficace et sécurisée.
- Offrir une expérience utilisateur optimale pour les clients.
- Gérer les commandes, les stocks et les paiements de manière automatisée.
- Promouvoir ses produits et fidéliser sa clientèle.

L'application de gestion de stock et vente en ligne devra inclure les fonctionnalités suivantes :

- 1 Enregistrement des produits par catégorie avec leurs caractéristiques (nom, description, référence, prix, image, etc.).
- 2 Suivi des niveaux de stock avec mise à jour automatique lors des entrées et sorties.
- 3 Gestion des commandes fournisseurs avec génération automatique des commandes en fonction des seuils de réapprovisionnement.
- 4 Gestion des entrées de stock (réception des produits des fournisseurs) avec enregistrement des quantités et des dates.
- 5 Gestion des sorties de stock (ventes ou autres utilisations) avec enregistrement des quantités et des dates.
- 6 Génération de rapports de suivi des stocks, des mouvements de stock et des performances de gestion.
- 7 Interface conviviale permettant une utilisation intuitive par les employés de la société INX SARLU.
- 8 Panier d'achat permettant aux clients d'ajouter, de modifier et de supprimer des articles.
- 9 Processus de commande avec gestion des adresses de livraison et des options de paiement.
- 10 Système de gestion des comptes clients avec inscription, connexion et gestion du profil.
- 11 Système de gestion des commandes et de suivi de livraison pour les clients et les administrateurs.
- 12 Intégration d'un système de paiement sécurisé permettant les paiements par carte bancaire, PayPal, etc.

(13) - Outils de promotion et de marketing, tels que des codes promotionnels et des programmes de fidélité.
(14) - Interface d'administration intuitive pour la gestion des produits, des commandes, des clients, etc.

Cours Systèmes dynamiques et analyse numérique

Aucun document autorisé

Durée : 1 heure 30

Les programmes doivent être rédigés dans le langage **python**

Il sera tenu compte de la qualité
de la rédaction dans l'évaluation des copies.

Exercice 1 :

On cherche à calculer numériquement une solution approchée de l'EDO scalaire (solution $x(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t),t), \quad t \in]t_0, t_f[, \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

On utilise pour cela le schéma de Heun (ou du trapèze explicite) avec une discrétisation non uniforme de l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ dont les pas de temps $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ne sont pas a priori constants ni connus à l'avance.

Le schéma s'écrit : x_0 donné au temps t_0 et **tant que** $t_{k-1} < t_f$:

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t_k} = \frac{1}{2}\Big[f(x_{k-1}, t_{k-1}) + f\Big(x_{k-1} + \Delta t_k f(x_{k-1}, t_{k-1}), t_k\Big)\Big].$$

(1) Quel est l'ordre de consistance de ce schéma ? Ce schéma est t-il conditionnellement ou inconditionnellement stable (pour des EDOs stables) ?

(2) Définir une fonction python `Heun(f,t0,tf,x0,dt0)` prenant en entrées le nom `f` de la fonction $f(x,t)$, les temps t_0 et t_f (notés `t0` et `tf`), la valeur initiale `x0` et le pas de temps initial `dt0`. Cette fonction calcule en sortie les tableaux notés `tvec` et `xvec` contenant les valeurs des t_k et des x_k. Le pas de temps sera pris égal à

$$\Delta t_k = \min(dt0, t_f - t_{k-1}).$$

On notera `t` le temps courant initialisé à `t0`, `x` la valeur courante de x_k initialisé à `x0` et `dt` le pas de temps courant initialisé à `dt0`. On utilisera une boucle `while t < tf:` qui mettra à jour les variables `x`, `t`, `dt` dans un ordre à déterminer.

L'ensemble des valeurs des t_k et des x_k seront empilées dans des tableaux `tvec` et `xvec` avec les commandes suivantes :

```
tvec = np.hstack([tvec, t]) # stack horizontal des t successifs
xvec = np.hstack([xvec, x]) # stack horizontal des x successifs
```

`tvec` et `xvec` seront initialisés à `tvec = t0` et `xvec = x0`.

Vous ne devez utiliser que les variables `x`, `t`, `dt` pour programmer ce schéma.

Veiller à programmer avec soin tous les éléments demandés : l'initialisation de l'algorithme, la boucle while, la mise à jour des variables.

(3) Définir la fonction

$$f(x,t) = \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2}x.$$

(4) Programmer la fonction suivante

$$xex(t) = \left(\frac{1}{3} + (\sqrt{10} - \frac{1}{3})e^{-\frac{3}{4}t}\right)^2$$

solution exacte de l'EDO pour la fonction f précédente et pour $t_0 = 0$, $x_0 = 10$. On utilisera la fonction **np.exp()** de la librairie numpy qui est vectorisée.

(5) Programmer le calcul de la solution numérique de l'EDO avec $t_0 = 0$, $t_f = 10$, $x_0 = 10$ et $dt_0 = 0.1$. Programmer l'affichage sur une même figure des solutions numérique et exacte. Programmer l'affichage sur une deuxième figure de la différence entre ces deux solutions.

Exercice 2

On cherche à calculer numériquement une solution approchée de l'EDO scalaire (solution $x(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} x'(t) &= -(x(t))^5, \quad t \in]t_0, t_f[, \\ x(t_0) &= x_0 > 0. \end{aligned}$$

On utilise pour cela le schéma suivant avec une discrétisation non uniforme de l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ dont les pas de temps $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ne sont pas a priori constants ni connus à l'avance. Le schéma s'écrit : $x_0 > 0$ donné au temps t_0 et **tant que** $t_{k-1} < t_f$, calculer x_k tel que :

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{\Delta t_k} = -(x_{k-1})^4 x_k.$$

(1) Quel est l'ordre de consistance de ce schéma ?

(2) Programmer une fonction python `SemiImplicite(t0,tf,x0,dt0)` prenant en entrées les temps t_0 et t_f (notés `t0` et `tf`), la valeur initiale `x0` et le pas de temps initial `dt0`. Cette fonction calcule en sortie les tableaux notés `tvec` et `xvec` contenant les valeurs des t_k et des x_k. Le pas de temps sera pris égal à

$$\Delta t_k = \min(dt0, t_f - t_{k-1}).$$

On notera `t` le temps courant initialisé à `t0`, `x` la valeur courante de x_k initialisé à `x0` et `dt` le pas de temps courant initialisé à `dt0`. On utilisera une boucle `while t < tf:` qui mettra à jour les variables `x`, `t`, `dt` dans un ordre à déterminer.

L'ensemble des valeurs des t_k et des x_k seront empilées dans des tableaux `tvec` et `xvec` avec les commandes suivantes :

```
tvec = np.hstack([tvec, t]) # stack horizontal des t successifs
xvec = np.hstack([xvec, x]) # stack horizontal des x successifs
```

`tvec` et `xvec` seront initialisés à `tvec = t0` et `xvec = x0`.

Vous ne devez utiliser que les variables x, t, dt pour programmer ce schéma.

Veiller à programmer avec soin tous les éléments demandés : l'initialisation de l'algorithme, la boucle while, la mise à jour des variables.

(3) Calculer analytiquement la solution exacte de l'EDO fonction de t et dépendante de t_0 et x_0 ; puis programmer la en python.

(4) Programmer le calcul de la solution numérique de l'EDO avec $t_0 = 0$, $x_0 = 2$, $t_f = 10$ et $dt_0 = 0.05$. Programmer l'affichage sur une même figure des solutions numérique et exacte. Programmer l'affichage sur une deuxième figure de la différence entre ces deux solutions.

UNIVERSITE DES LAGUNES
ABIDJAN

2024-2025
L 3
3H

EXAMEN
CALCUL DIFFERENTIEL - EDO

EXERCICE 1 :

1. Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, f une application de E dans F.
   (a) Donner avec précision la définition de la différentiabilité de f en un point x de E.
   (b) Montrer en raisonnant par l'absurde que cette différentielle est unique.
2. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme déduite du produit scalaire usuel.
   (a) Donner les différentielles des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ définies par :
   $$f(x) = < a, x >, \text{ où } a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$$
   $$g(x) = \|x\|^2, \quad h(x) = \|x\| = \sqrt{g(x)}$$
   (b) En déduire la différentielle de la fonction ϕ de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définies par
   $$\phi(x) = \exp(\|x\|) + < a, x >$$
   (c) Trouver les points critiques x_a de ϕ en remarquant que $x_a = -\lambda a$ où $\lambda > 0$. On diféerentiera les cas $|a| \geq 1$ et $|a| < 1$.

EXERCICE 2 :

On munit $E = R_n[X]$ de la norme $\|P\| = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$.

1. Montrer que l'application
   $$f : P \mapsto \int_0^1 P^2(t)dt$$
   définie sur $E = R_n[X]$ est différentiable et exprimer sa différentielle.
2. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = Tr(M^2)$
   Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

EXERCICE 3 :

1. Calculer le jacobien de l'application :
   $$(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)$$
2. Montrer que
   $$\varphi : (x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2}\cos y, y + \frac{1}{2}\cos x)$$
   est un $\mathcal{C}^1$ - difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

TD N° 2 – MESURE ET INTEGRATION

Fonctions mesurables - Intégration

Consignes

Les exercices doivent être préparés et résolus par les étudiants.

EXERCICE 1 Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures sur un espace mesurable $(X,\mathcal{T})$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}\mu_n$ est une mesure sur $(X,\mathcal{T})$.

Rappel : Si $(a_{n,p})_{n,p}$ une suite double de réels positifs alors $\sum_n\sum_p a_{n,p} = \sum_p\sum_n a_{n,p}$

EXERCICE 2 Pour $a\in\mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac en a sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Soit $\mu_1 := \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2 + \frac{1}{4}\delta_3$. Justifier que μ_1 est une mesure sur $((\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Calculer $\mu_1\left(\left[0,\frac{3}{2}\right]\right)$. Montrer que μ_1 est une probabilité sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. Soit $\mu_2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{2^n}\delta_n$. Justifier que μ_2 est une mesure sur $((\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Calculer $\mu_2(\{1,2,\cdots,k\})$ pour tout $k\geq 1$. En déduire $\mu_2(\mathbb{N})$.
3. Soit $\mu_3 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\delta_{\frac{1}{\sqrt{n}}}$. Justifier que μ_3 est une mesure sur $((\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Calculer $\mu_3\left(\left[\frac{1}{2},2\right]\right)$. Calculer $\mu_3(\mathbb{R})$.

EXERCICE 3 Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace mesurable et $A\subset\Omega$. Montrer que la fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$ de A est mesurable si et seulement si $A\in\mathcal{A}$.

EXERCICE 4 Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace mesurable et $f:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ une application. On définit pour tout entier non nul n la fonction f_n par

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)|<n \\ n & \text{si} \quad f(x)\geq n \\ -n & \text{si} \quad f(x)\leq -n. \end{cases}$$

Montrer que f est mesurable si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est mesurable.

EXERCICE 5 Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace mesurable.

1. Soit $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ mesurable, montrer que $|f|$ est mesurable.
2. En supposant que $\mathcal{T}\neq\mathcal{P}(X)$, montrer que la réciproque est fausse.

EXERCICE 6 On considère la famille $\mathcal{T}$ formée des parties A de $\mathbb{Z}$ vérifiant la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2n \in A \Leftrightarrow 2n+1 \in A.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{Z}$ contenue strictement dans $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
2. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $\varphi(n) = n+2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, est bijectice, $(\mathcal{T},\ \mathcal{T})$-mesurable et φ^{-1} n'est pas $(\mathcal{T},\ \mathcal{T})$-mesurable.

EXERCICE 7

1. Quelles sont les applications mesurables h de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ lorsque $\mathcal{A}$ est la tribu grossière ? lorsque $\mathcal{A}$ est la tribu triviale ?
2. Soient f et g des fonctions de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que les fonctions $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont aussi $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

EXERCICE 8 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = 5 \cdot \mathbf{1}_{[-1,2[}(x) - 2 \cdot \mathbf{1}_{[1,4[}(x)$.

1. La fonction f est-elle étagée ? Si oui, trouver une représentation canonique de f.
2. Décrire explicitement l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 4\}$.

EXERCICE 9 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables et positives sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, qui converge simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe n_0 tel que $\int_X f_{n_0} \mathrm{d}\mu < +\infty$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu$ et que $\int_X f_n \mathrm{d}\mu < +\infty$.

Peut-on supprimer l'hypothèse $\int_X f_{n_0} \mathrm{d}\mu < +\infty$? Si non donner un contre exemple.

EXERCICE 10 Soit $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ l'espace mesuré, où m est la mesure de dénombrement sur $\mathbb{N}$ définie par $m(A) = \mathrm{card}(A)$ pour toute partie A de $\mathbb{N}$. Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ une application. Montrer que f est mesurable puis expliciter la valeur de $\int_{\mathbb{N}} f dm$.

EXERCICE 11 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_n$ une suite de fonctions μ-intégrables de Ω dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-intégrable. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n| d\mu = \int_\Omega |f| d\mu \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0.$$

EXERCICE 12 Sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on considère la suite de fonctions $f_n = \dfrac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]} - \dfrac{1}{n}\mathbf{1}_{[-n,0]}$.

a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers une fonction f que l'on déterminera.

b) Montrer que f et chaque f_n sont intégrables.

c) Les égalités suivantes sont-elles vraies ?

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\lambda = 0.$$

On remarquera que dans cette question, pour chacune des fonctions g considérées, on a $\int_{\mathbb{R}} g d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$.)

EXERCICE 13 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x}}{1+nx}, \qquad \forall x \in [0, +\infty[.$$

Calculer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x$.

EXERCICE 14

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{n}{1+x^2} \sin\left(\frac{x}{n}\right), \qquad \forall x \in [0, 1].$$

Calculer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x$.

EXERCICE 15 Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1 - \cos^n(x)}{1+x^2}, \qquad \forall x \in]0, +\infty[.$$

Calculer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x$.

EXERCICE 16 Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} \frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}}, \qquad \forall x \in]0, +\infty[.$$

1. Montrer pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x$ existe et l'exprimer en fonction de $S = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} \mathrm{d}x$.
3. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x = +\infty$. Expliquer pourquoi le théorème de la convergence dominée ne s'applique pas.

1) • $\left| \frac{\sin(x)}{x^2} \frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}} \right| \leq \frac{1}{x^2}$

• $\left| \frac{\sin x}{x^2} \frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}} \right| \underset{0}{\sim} \frac{1}{x} x^{1/n} = \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}}$

Devoir de Maison

Exo 12 à rendre

2) • On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable

• $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{(\sin x)}{x^2} \frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}} = \frac{\sin x}{2x^2} = f(x)$

• $|f_n(x)| = \left| \frac{\sin(x)}{x^2} \frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ et

$x \mapsto 1/x^2$ intégrable sur $[1, +\infty[$.

Université Côte d'Azur

Licence 3 : Portail sciences et technologies
2024-2025

Partiel de modélisation statistique
Durée 1h30
Documents et calculatrice interdits

Questions de cours

1. Enoncer le théorème central limite
2. Rappeler l'intérêt de la delta-méthode
3. Soit $\hat{\theta}_n$ un estimateur d'un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$:
   (a) Rappeler la définition du biais de $\hat{\theta}_n$ comme estimateur de θ
   (b) La définition de l'erreur moyenne quadratique de $\hat{\theta}_n$ comme estimateur de θ

Démonstration du cours

1. Montrer que la convergence en moyenne quadratique implique la convergence en probabilités.
2. Prouver le corollaire du théorème de Slutsky, ce corollaire s'énonçant comme suit :
   Soit (X_n) une suite de variables aléatoires, a et σ^2 des constantes telles que

$$\sqrt{n}(X_n - a) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

   alors (X_n) converge en probabilité vers a

Exercice 1

Soit $\lambda > 0$, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction de densité
2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f :
   (a) Donner l'expression de la fonction de répartition de X
   (b) Calculer l'espérance de X

Exercice 2

Soit $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et de variance $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_1]$

Considérons $\overline{X}_n$ défini par $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$

1. Calculer $\mathbb{E}[\overline{X}_n]$
2. Calculer $\mathbb{V}[\overline{X}_n]$
3. Montrer que $\mathbb{E}[(\overline{X}_n - \mu)^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Que peut-on donc dire sur $\overline{X}_n$?
4. Montrer que $\overline{X}_n$ converge en probabilité vers μ.

$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - E(X_1))}{\sqrt{Var(X_n)}} \to \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Université Côte d'Azur — Licence 3 : Portail sciences et technologies

2024-2025

Examen de modélisation statistique

Durée 3h

Une feuille A4 manuscrite autorisée

Tout type de calculatrice autorisé

Exercice 1. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi uniforme sur $[0, \theta]$. On cherche à estimer θ. On rappelle que la moyenne empirique est donnée par $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(1) Calculer $\mathbb{E}[X_1]$.

(2) Montrer que $2\bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de θ.

(3) Montrer que $2\bar{X}_n$ est un estimateur consistant de θ .

(4) Montrer que l'estimateur est asymptotiquement normal. Préciser les paramètres de cette loi asymptotique.

(5) Montrer que l'erreur quadratique moyenne de $2\bar{X}_n$ est égale à $\frac{\theta^2}{3n}$.

On va construire un autre estimateur. On note $\hat{\theta}_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$.

(6) Montrer que la fonction de répartition de $\hat{\theta}_n$ est donnée par la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\mathbb{P}(\hat{\theta}_n \le x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 < x \le \theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}.$$

(7) En déduire que la fonction de répartition de $(\theta - \hat{\theta}_n)$ est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\mathbb{P}(\theta - \hat{\theta}_n \le x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 \le x < \theta \\ 1 & \text{si } x \ge \theta \end{cases}.$$

(8) En déduire que pour $x < 0$, $\mathbb{P}(\theta - \hat{\theta}_n \le x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et que pour $x \ge 0$, $\mathbb{P}(\theta - \hat{\theta}_n \le x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

(9) En déduire que $\theta - \hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} 0$ puis que $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \theta$.

(10) Au vu de ce résultat peut-on conclure que l'estimateur est consistant ? Fortement consistant ?

(11) On pose $Y_n = \theta - \hat{\theta}_n$. Calculer la densité de probabilité de Y_n.

(12) Montrer que le risque quadratique moyen $R(\hat{\theta}_n)$ est égal au second moment de Y_n, $R(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}(Y_n^2)$, et le calculer.

(13) Quel estimateur de $2\bar{X}_n$ ou $\hat{\theta}_n$ préconiseriez-vous pour estimer θ ? (justifier votre réponse)

(14) Considérons 5 valeurs simulées selon une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 10]$: 9,61 2,92 2,94 7,54 5,06. Données les estimations issues des deux estimateurs présentés précédemment et dire laquelle est la plus proche de la vraie valeur.

On s'intéresse maintenant à $\varepsilon_n = n(\theta - \hat{\theta}_n)$.

(15) Montrer que la fonction de répartition de ε_n est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par la fonction

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n \le x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n\theta}\right)^n & \text{si } 0 \le x < n\theta \\ 1 & \text{si } x \ge n\theta \end{cases}.$$

(16) En déduire que la fonction de répartition de ε_n converge simplement vers la fonction de répartition donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$x \to \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

(17) Soit E une variable aléatoire réelle ayant la fonction de répartition précédemment trouvée. Quelle est la loi de E ?

Exercice 2. Considérons le modèle de régression linéaire suivant :

$$Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

avec, pour chaque i, Y_i une variable aléatoire réelle, x_i un nombre réel, β une nombre réel, et ε_i une variable aléatoire réelle. On suppose que les $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont i.i.d issues d'une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$.

(1) Donner la loi de Y_i pour $i = 1, 2, \ldots, n$.
(2) Justifier le fait que les $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendants mais pas de même loi si les x_i ne sont pas tous les mêmes.
(3) Calculer $f(Y; \beta, \sigma^2)$ la vraisemblance du vecteur gaussien $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^\top$
(4) Montrer que la maximisation de la vraisemblance par rapport à β est équivalente à minimiser la fonction suivante par rapport à β :

$$C(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta x_i)^2$$

(5) En déduire que l'estimateur du maximum de vraisemblance de β est

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{1}$$

(6) En déduire que $\hat{\beta}$ est un estimateur sans biais de β.
(7) Montrer que $\mathbb{V}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.
(8) Déduire des points (3), (5), (6) et (7) la loi de $\hat{\beta}$.
(9) En déduire que l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ^2 noté $\hat{\sigma}^2$
(10) En fait, on montre que $n\hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$; en déduire que $\hat{\sigma}^2$ est un estimateur biaisé de σ^2 et proposer un estimateur sans biais noté $\hat{\sigma}^2_{sb}$
(11) En admettant que $\hat{\beta}$ et $\hat{\sigma}^2$ sont indépendants, quelle serait la loi de $\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}(\hat{\beta} - \beta)}{\hat{\sigma}_{sb}}$?
(12) En quoi la connaissance de cette loi peut nous être utile par la suite ?
(13) Commenter les éléments du résumé d'une régression de ce type (sans intercept) présentée si dessous :
   (a) Valeur estimée du paramètre β
   (b) Valeur estimée de l'écart-type de l'estimateur de β
   (c) β est-il significativement différent de 0 au risque $\alpha = 5\%$?

```
> X1 = ozone$T12
> Y1 = ozone$maxO3
> summary(lm(Y1~-1+X1))

Call:
lm(formula = Y1 ~ -1 + X1)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-37.930 -14.290  -2.462   9.605  50.728

Coefficients:
   Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
X1  4.23795    0.07855   53.95   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 18.21 on 111 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9633,    Adjusted R-squared:  0.9629
F-statistic:  2911 on 1 and 111 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Exercice 3. Supposons que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires i.i.d suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

On considère $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ comme estimateur de μ.

(1) Montrer que $\hat{\mu}_n$ est un estimateur sans biais de μ.
(2) Donner la variance de $\hat{\mu}_n$.
(3) Montrer que $\hat{\mu}_n$ est un estimateur consistant de μ.

Intéressons-nous maintenant à l'estimation de μ^2. Comme $\bar{X}_n$ est un estimateur consistant de μ il semble raisonnable d'estimer μ^2 par $\bar{X}_n^2$.

(4) Montrer que $\mathbb{E}(\bar{X}_n^2) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$ (indice, utiliser : $\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}((\bar{X}_n - \mu)^2) = \mathbb{E}(\bar{X}_n^2) - \mu^2$)
(5) En déduire que $\bar{X}_n^2$ est un estimateur biaisé de μ^2, mais qu'il est asymptotiquement sans biais.
(6) D'après le cours donner la formule de S^2 l'estimateur sans biais de σ^2.
(7) D'après les résultats précédents en déduire un estimateur sans biais de μ^2.
(8) En utilisant la delta méthode déterminer la distribution asymptotique de $\sqrt{n}(\bar{X}_n^2 - \mu^2)$

Exercice 4. On rappelle les quantiles de la loi normale centrée réduite $z_{0,950} = 1,64$ et $z_{0,975} = 1,96$.

Considérons $\hat{\theta}_n$ l'estimateur d'un paramètre inconnu θ à partir de n données et supposons que $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(1) Construire un intervalle de confiance à 95% sur le paramètre θ
(2) On veut tester $H_0 : \{\theta = 2\}$ contre $H_1 : \{\theta \neq 2\}$ au niveau de 5% :
  (a) Construire la zone de rejet associée à ce test
  (b) Supposons maintenant que la vraie valeur du paramètre soit égale à 3 montrer que la puissance du test dans cas (probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est fausse) s'exprime de la façon suivante :
$$1 - F(1,96 - \sqrt{n}) + F(-1,96 - \sqrt{n}) = F(\sqrt{n} - 1,96) + F(-1,96 - \sqrt{n})$$
  avec F la fonction de répartition de la $\mathcal{N}(0, 1)$.
  (c) Comment faut-il choisir n pour avoir une puissance supérieure ou égale à 95% ? (on pourra pour résoudre le problème négliger le second terme dans l'expression donnée ci-dessus)
  (d) Considérons $n = 16$ et $\hat{\theta}_n = 2,5$ rejetez-vous H_0 au risque de 5% ?

```
  one$T12
> Y1 = ozone$maxO3
> summary(lm(Y1~-1+X1))

Call:
lm(formula = Y1 ~ -1 + X1)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-37.930 -14.290  -2.462   9.605  50.728 

Coefficients:
   Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
X1  4.23795    0.07855   53.95   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 18.21 on 111 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9633,	Adjusted R-squared:  0.9629 
F-statistic:  2911 on 1 and 111 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Exercice 3. Supposons que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires i.i.d suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

On considère $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ comme estimateur de μ.

(1) Montrer que $\hat{\mu}_n$ est un estimateur sans biais de μ.
(2) Donner la variance de $\hat{\mu}_n$.
(3) Montrer que $\hat{\mu}_n$ est un estimateur consistant de μ.

Intéressons-nous maintenant à l'estimation de μ^2. Comme $\bar{X}_n$ est un estimateur consistant de μ il semble raisonnable d'estimer μ^2 par $\bar{X}_n^2$.

(4) Montrer que $\mathbb{E}(\bar{X}_n^2) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$ (indice, utiliser : $\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}((\bar{X}_n - \mu)^2) = \mathbb{E}(\bar{X}_n^2) - \mu^2$)
(5) En déduire que $\bar{X}_n^2$ est un estimateur biaisé de μ^2, mais qu'il est asymptotiquement sans biais.
(6) D'après le cours donner la formule de S^2 l'estimateur sans biais de σ^2.
(7) D'après les résultats précédents en déduire un estimateur sans biais de μ^2.
(8) En utilisant la delta méthode déterminer la distribution asymptotique de $\sqrt{n}(\bar{X}_n^2 - \mu^2)$

Exercice 4. On rappelle les quantiles de la loi normale centrée réduite $z_{0,950} = 1.64$ et $z_{0,975} = 1,96$.

Considérons $\hat{\theta}_n$ l'estimateur d'un paramètre inconnu θ à partir de n données et supposons que $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(1) Construire un intervalle de confiance à 95% sur le paramètre θ
(2) On veut tester $H_0 : \{\theta = 2\}$ contre $H_1 : \{\theta \neq 2\}$ au niveau de 5% :
   (a) Construire la zone de rejet associée à ce test
   (b) Supposons maintenant que la vraie valeur du paramètre soit égale à 3 montrer que la puissance du test dans cas (probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est fausse) s'exprime de la façon suivante :
   $$1 - F(1,96 - \sqrt{n}) + F(-1,96 - \sqrt{n}) = F(\sqrt{n} - 1,96) + F(-1,96 - \sqrt{n})$$
   avec F la fonction de répartition de la $\mathcal{N}(0,1)$.
   (c) Comment faut-il choisir n pour avoir une puissance supérieure ou égale à 95% ? (on pourra pour résoudre le problème négliger le second terme dans l'expression donnée ci-dessus)
   (d) Considérons $n = 16$ et $\hat{\theta}_n = 2,5$ rejetez-vous H_0 au risque de 5% ?

```
> X1 = ozone$T12
> Y1 = ozone$maxO3
>
> summary(lm(Y1~-1+X1))

Call:
lm(formula = Y1 ~ -1 + X1)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-37.930 -14.290  -2.462   9.605  50.728

Coefficients:
   Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
X1  4.23795    0.07855   53.95   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 16.21 on 111 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9633,	Adjusted R-squared:  0.9629
F-statistic:  2911 on 1 and 111 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Exercice 3. Supposons que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires i.i.d suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

On considère $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ comme estimateur de μ.

(1) Montrer que $\hat{\mu}_n$ est un estimateur sans biais de μ.
(2) Donner la variance de $\hat{\mu}_n$.
(3) Montrer que $\hat{\mu}_n$ est un estimateur consistant de μ.

Intéressons-nous maintenant à l'estimation de μ^2. Comme $\bar{X}_n$ est un estimateur consistant de μ il semble raisonnable d'estimer μ^2 par $\bar{X}_n^2$.

(4) Montrer que $\mathbb{E}(\bar{X}_n^2) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$ (indice, utiliser : $\mathbb{V}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}((\bar{X}_n - \mu)^2) = \mathbb{E}(\bar{X}_n^2) - \mu^2$).
(5) En déduire que $\bar{X}_n^2$ est un estimateur biaisé de μ^2, mais qu'il est asymptotiquement sans biais.
(6) D'après le cours donner la formule de S^2 l'estimateur sans biais de σ^2.
(7) D'après les résultats précédents en déduire un estimateur sans biais de μ^2.
(8) En utilisant la delta méthode déterminer la distribution asymptotique de $\sqrt{n}(\bar{X}_n^2 - \mu^2)$

Exercice 4. On rappelle les quantiles de la loi normale centrée réduite $z_{0,950} = 1.64$ et $z_{0,975} = 1,96$.

Considérons $\hat{\theta}_n$ l'estimateur d'un paramètre inconnu θ à partir de n données et supposons que $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(1) Construire un intervalle de confiance à 95% sur le paramètre θ
(2) On veut tester $H_0 : \{\theta = 2\}$ contre $H_1 : \{\theta \neq 2\}$ au niveau de 5% :
  (a) Construire la zone de rejet associée à ce test
  (b) Supposons maintenant que la vraie valeur du paramètre soit égale à 3 montrer que la puissance du test dans cas (probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est fausse) s'exprime de la façon suivante :

  $$1 - F(1,96 - \sqrt{n}) + F(-1,96 - \sqrt{n}) = F(\sqrt{n} - 1,96) + F(-1,96 - \sqrt{n})$$

  avec F la fonction de répartition de la $\mathcal{N}(0,1)$.
  (c) Comment faut-il choisir n pour avoir une puissance supérieure ou égale à 95% ? (on pourra pour résoudre le problème négliger le second terme dans l'expression donnée ci-dessus)
  (d) Considérons $n = 16$ et $\hat{\theta}_n = 2,5$ rejetez-vous H_0 au risque de 5% ?

UL ANNEE 2024-2025

EXAMEN : RECHERCHE OPERATIONNELLE

Niveau : Licence 3 Mathématiques Durée : 2h
Documents non autorisésnh

Exercice 1
Une chaîne de magazins utilise une flotte de camions loués à diverses agences de location. Elle a prevu de besoins en camions sur une période de 6 mois décrit dans le tableau suivant :

Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
430	410	440	390	425	450

Au 1[er] janvier, la chaîne a 200 camions dont la location se termine fin Février. Elle cherche a satisfaire ses besoins avec trois types de contrats pouvant prendre effet le premier jour de chaque mois.
- Des contrats de 3 mois à 1700 Unité monétaire (côut total non mensuel)
-Des contrats de 4 mois à 2200 Unité monétaire (côut total non mensuel)
Des contrets de 5 mois à 2600 Unité monétaire (côut total non mensuel)
Formuler sans le resoudre ce problème en programmation linéaire.
On souhaite déterminer le nombre de contrats de chaque type à démarrer chaque mois de façon à couvrir les besoins au moindre côut et à se debarrasser de toute la flotte début juillet.
Ecrire sans resoudre le modèle linéaire crrespondant à ce problème.

Exercice 2
On donne le programme linéaire suivant :

$$MaxZ = 2x_1 + x_3.$$

$$(P)\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_3 \geq 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1) Donner le dual (D) de (P).
2) La solution $X^* = (2, 2, 0)^t$ est-elle optimale, justifier votre reponse.
3) Résoudre le programme (D) et en utilsant l'algorithme simplexe qui convient et enduire une solution optimale de (P).

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3

On donne le programme suivant

$$(P_1) : \begin{cases} MinZ = -x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 9 \\ 5x_1 + 2x_2 = 8 \\ 3x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) Transformer (P_1) en un programme de maximisation appelé (P_2).

2) Resoudre alors (P_2) en utilisant la méthode du "grand 'M '.

3) En déduire une solution de (P_1).

◦◦◦ Université des lagunes / FST ◦◦◦			Année : 2024 / 2025
UE: Mesure et Intégration	Niveau : Licence 3	Date: 26/11/2024	Durée : 1 heure

Devoir de contrôle n° 1

NB: aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : 3 points

1. Soit X un ensemble non vide. Qu'est-ce qu'une tribu $\mathcal{A}$ sur X ?
2. Soit X un espace topologique. Donner la dénition de la tibu $\mathcal{B}(X)$.
3. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Qu'appelle mesure positive μ sur X.

Exercice 2 : 4 points

Soient X et Y deux ensembles non vides et $f : X \to Y$ une application. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Y. On pose $f^{-1}(\mathcal{A}) = \{f^{-1}(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{A}\}$. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{A})$ est une tribu sur X.

Exercice 3 : 7 points

On pose $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \text{ tel que } A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable } \}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathcal{A} = \sigma(\{\{x\}\,;\, x \in \mathbb{R}\})$.
3. On définit $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ par $\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } A^c \text{ est dénombrable} \end{cases}$

   Montrer que μ est une mesure sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : 6 points

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesuré. Soit A un élément non vide de $\mathcal{A}$ vérifiant la relation :

$$(B \in \mathcal{A} \text{ et } B \subset A) \Rightarrow (B = \emptyset \text{ ou } B = A).$$

On définit alors

$$\begin{aligned} \mu_A :\ \mathcal{A} &\to [0, +\infty[\\ B &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } A \subset B \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que μ_A est une mesure.

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union – Discipline – Travail

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES LAGUNES
ABIDJAN
IN VERITATE ET SAPIENTIA

Année : 2024-2025

EXAMEN DE MODELISATION UML

FACULTE DE SCIENCES ET TECHNOLOGIE – Licence 3 de Maths

Durée : 02 H Premier semestre - Session 1 : Novembre 2024

Evaluation : UML : Licence 3 de Mathématiques

QUESTIONS DE COURS (10 pts)

1- Quel est l'objectif d'un model informatique?

2- Quelle est la différence entre une modélisation objet et une modélisation fonctionnelle ?

3- UML est un langage de modélisation. Pourquoi ?

4-Citez les branches de modélisation employées par UML

5- Citez deux exemples de diagrammes pour chaque « branche » de la modélisation UML

6- Qu'est-ce qu'un objet?

7- Quelle est la différence entre un attribut, une opération et un héritage ?

ETUDE DE CAS 1 (6 pts)

En vue de la mise en place d'un logiciel dédié à l'industrie textile, nous étudions principalement quelques fonctionnalités permettant de recueillir l'information sur les produits développés dans l'entreprise. Tout le personnel de l'entreprise peut consulter le système, soit pour vérifier qu'un produit particulier existe, soit pour un parcours libre des informations. Toute consultation doit être précédée par une authentification légère dans laquelle la personne précise son nom et son service à des fins de statistiques ultérieures.

Les ingénieurs peuvent effectuer différentes opérations de mise à jour pour les produits dont ils sont responsables : ajout, retrait et modification des informations sur les produits. Ces opérations doivent être précédées d'une authentification plus approfondie lors de laquelle l'ingénieur précise son nom, son service et introduit un mot de passe qui est vérifié en contactant le système de gestion du personnel.

Toutes les opérations (consultations et mises à jour) donnent lieu à un enregistrement dans un journal des accès et peuvent optionnellement s'accompagner d'une impression des documents accédés.

Travail à faire

1- Relevez les différents acteurs de ce cas
2- Modélisez cette situation à l'aide d'un diagramme des cas d'utilisation ;
3- Décrire à partir d'un tableau le DCU obtenu

ETUDE DE CAS 2 (4 pts)

On désire automatiser la gestion d'une petite bibliothèque municipale. Pour cela, on a analysé son fonctionnement pour obtenir la liste suivante de règles et d'affirmations :

• les adhérents ont un prénom (chaîne de caractères) et un nom (chaîne de caractères).

• la bibliothèque comprend un ensemble de documents et un ensemble d'adhérents.

• les adhérents sont inscrits ou désinscrits sur une simple demande.

• de nouveaux documents sont ajoutés régulièrement à la bibliothèque.

• ces documents sont soit des journaux, soit des volumes.

• les volumes sont soit des dictionnaires, soit des livres, soit des BD.

• Les documents sont caractérisés par un titre (chaîne de caractères).

• les volumes ont en plus un auteur (chaîne de caractères). Les Bases de Données ont en plus un nom de destinataire (chaîne de caractères).

• les journaux ont, outre les caractéristiques des documents, une date de parution (une date).

• seuls les livres sont empruntables.

• un adhérent peut emprunter ou restituer un livre.

• les adhérents peuvent emprunter des livres (et uniquement des livres) et on doit pouvoir savoir à tout moment quels sont les livres empruntés par un adhérent.

• un adhérent peut emprunter au plus 3 livres.

• la date de restitution d'un livre emprunté est fixée au moment du prêt. Cette date peut être prolongée sur demande.

Travail à faire

a- Réalisez le diagramme de classes permettant d'automatiser la bibliothèque municipale.

b- Définissez les attributs et les méthodes de chaque classe de ce digramme, ainsi que les multiplicités entre les différentes classes.

malingre

pérenne

UNIVERSITÉ DES LAGUNES
ABIDJAN

Faculté des Sciences et Technologie

Licence 3 Année : 2024–2025

CONTRÔLE DE MESURE ET INTÉGRATION

Durée : 50 minutes

Exercice 1 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. On définit pour tout entier non nul n la fonction f_n par

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)| < n \\ n & \text{si} \quad f(x) \geq n \\ -n & \text{si} \quad f(x) \leq -n. \end{cases}$$

On veut montrer que f est mesurable si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est mesurable.

1. On suppose que f est mesurable.
   (a) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad |t| < n \\ n & \text{si} \quad t \geq n \\ -n & \text{si} \quad t \leq -n. \end{cases}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction w_n ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n = w_n \circ f$, déduire que f_n est ~~continue~~. mesurable.
2. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est mesurable. Montrer que $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$ puis déduire que f est mesurable.

Exercice 2

1. Donner la définition d'une mesure positive sur un espace mesurable.
2. Existe-t-il une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ telle que

$$\{\mu(A),\ A \in \mathcal{A}\} = \{0, 1, 3\}?$$

Justifier votre réponse.

Exercice 3

1. Énoncer le lemme de Fatou. Puis calculer, en utilisant le lemme de Fatou, $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{n e^{-x}}{nx + 1} \mathrm{d}x$.
2. Énoncer le théorème de la convergence monotone de Beppo-Levi. Puis calculer, en utilisant le théorème de la convergence monotone de Beppo-Levi, $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{n+3}} \mathrm{d}x$.
3. Énoncer le théorème de la convergence dominée. Puis calculer en utilisant, le théorème de la convergence dominée, $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{n+3}} \mathrm{d}x$.

UNIVERSITÉ
DES LAGUNES
ABIDJAN

Faculté des Sciences et Technologie

Licence 3 Année : 2024–2025

CONTRÔLE DE MESURE ET INTÉGRATION

Durée : 50 minutes

Exercice 1 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. On définit pour tout entier non nul n la fonction f_n par

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)| < n \\ n & \text{si} \quad f(x) \geq n \\ -n & \text{si} \quad f(x) \leq -n. \end{cases}$$

On veut montrer que f est mesurable si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est mesurable.

1. On suppose que f est mesurable.
   (a) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad |t| < n \\ n & \text{si} \quad t \geq n \\ -n & \text{si} \quad t \leq -n. \end{cases}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction w_n ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) En remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n = w_n \circ f$, déduire que f_n est ~~continue~~. mesurable.
2. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est mesurable. Montrer que $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$ puis déduire que f est mesurable.

Exercice 2

1. Donner la définition d'une mesure positive sur un espace mesurable.
2. Existe-t-il une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ telle que

$$\{\mu(A),\ A \in \mathcal{A}\} = \{0, 1, 3\}?$$

Justifier votre réponse.

Exercice 3

1. Énoncer le lemme de Fatou. Puis calculer, en utilisant le lemme de Fatou, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{nx+1} \mathrm{d}x$.
2. Énoncer le théorème de la convergence monotone de Beppo-Levi. Puis calculer, en utilisant le théorème de la convergence monotone de Beppo-Levi, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+3}} \mathrm{d}x$.
3. Énoncer le théorème de la convergence dominée. Puis calculer en utilisant, le théorème de la convergence dominée, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+3}} \mathrm{d}x$.

MIAGE UFHB : Licence 3 **Année universitaire : 2024-2025**

Examen de Programmation Linéaire ($2^{\text{ième}}$ session)
Documents non autorisés
Durée : 2H

Exercice 1 (7 points)

Une entreprise de mécanique fabrique, dans son usine, 3 types de pièce a, b, c dans 3 ateliers : usinage, montage, finition. Le tableau ci-dessous résume.

	nombre d'heures machines nécessaire pour fabriquer une pièce			Prix de vente de la pièce
	usinage	montage	finition	
pièce a	0.10	0.15	0.15	35.50
pièce b	0.20	0.15	0.25	51.50
pièce c	0.40	0.45	0.15	92.50
coût variable de l'heure	60	80	50	
Capacité de l'atelier (en heure/mois)	2000	2400	2400	

Déterminer le programme de fabrication permettant à l'usine d'obtenir un bénéfice maximum (on suppose que la totalité des charges variables sont reparties par l'intermediaire des trois centres d'analyse).

Exercice 2 (5 points)

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n_+$ On considère le programme linéaire (P) suivant, dit symétrique.

$$\begin{cases} \max Z(x) = \langle b, x \rangle \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que si le système linéaire $Ax = b$ admet une solution $\overline{x} \geq 0$, cette solution est optimale pour (P).

Exercice 3 (8 points)

On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \min Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5. \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

Determiner programme duale

par 2 phases ou π et ~~en déduire les sol~~ ~~du dual~~

1) ~~Résoudre ce programme linéaire en utilisant la méthode duale du simplexe.~~

resoudre et en déduire solution du programme dual obtenu en 1

2) En utilisant la correspondance duale à l'optimum, déduire de 1) une solution optimale du dual de ce programme que l'on donnera.

UL

Licence 3 Maths

ANNÉE ACADÉMIQUE 2024-2025

ECUE: **Analyse Numérique**

EXAMEN : 1ère session

DURÉE:2H

Exercice 1 (13 points).

Soit les systèmes linéaires

$$(S_1) : \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 10 \end{cases} \qquad et \qquad (S_2) : \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 6 \end{cases}$$

1. *Donner la décomposition LU de la matrice associée à (S_1) puis résoudre (S_1) en utilisant la factorisation LU.*
2. *Résoudre par la méthode de Cholesky le système (S_2)*
3. *Rappeler une condition suffisante de convergence pour les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel. Les systèmes (S_1) et (S_2) vérifient-ils ces conditions ?*
4. *Écrire les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour ces deux systèmes linéaires.*
5. *On illustrera les résultats théoriques de convergence/non-convergence de ces deux schémas en prenant comme point de départ le vecteur $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ et en calculant les 3 premiers itérés :*
   (a) *avec la méthode de Jacobi pour le système (S_1),*
   (b) *avec la méthode de GAUSS-SEIDEL pour le système (S_1),*
   (c) *avec la méthode de JACOBI pour le système (S_2),*
   (d) *avec la méthode de GAUSS-SEIDEL pour le système (S_2).*
6. *On comparera le résultat obtenu avec la solution exacte (qu'on calculera à l'aide de la méthode d'élimination de GAUSS).*

Exercice 2 (7 points).

Soit l'équation différentielle à condition initiale $y'(t) = y(t) + t$ et $y(0) = 1$.

1. *Approcher la solution de cette équation en $t = 1$ à l'aide de la méthode d'Euler explcite en subdivisant l'intervalle de travail en 3 parties égales. Comparer à la solution exacte.*
2. *Approcher la solution de cette équation en $t = 1$ à l'aide de la méthode d'Euler implcite en subdivisant l'intervalle de travail en 3 parties égales. Comparer à la solution exacte.*
3. *Approcher la solution de cette équation en $t = 1$ à l'aide de la méthode de Runge Kunta d'odre 2 en subdivisant l'intervalle de travail en 3 parties égales. Comparer à la solution exacte.*
4. *Approcher la solution de cette équation en $t = 1$ à l'aide de la méthode de Runge Kunta d'odre 4 en subdivisant l'intervalle de travail en 3 parties égales. Comparer à la solution exacte.*

Faculté de Sciences et Technologie
Licence 3

Université des Lagunes
2024-2025

EXAMEN de REGRESSSION LINEAIRE

Durée : 02h15 mn

Jeudi 26 Juillet 2025

Ordinateurs non autorisés. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1

Le jeu de données "Boston" contient des informations sur 506 quartiers de la ville de Boston et alentours. Nous disposons des variables suivantes :

- "medv" : valeur médiane des prix des maisons (en dizaines de milliers de dollars) ;
- "rm" : nombre moyen de pièces ;
- "age" : proportion de maisons construites avant 1940 ;
- "lstat" : proportion de ménages ayant un niveau de vie peu élevé ;
- "crim" : taux de criminalité ;
- "chas" : proximité de la rivière Charles (modalité "1" si le quartier est au bord de la rivière, modalité "0" sinon).

La matrice des corrélations entre toutes les variables quantitatives du jeu de données est la suivante :

	medv	rm	age	lstat	crim
medv	1.00	0.70	-0.38	-0.74	-0.39
rm	0.70	1.00	-0.24	-0.61	-0.22
age	-0.38	-0.24	1.00	0.60	0.35
lstat	-0.74	-0.61	0.60	1.00	0.46
crim	-0.39	-0.22	0.35	0.46	1.00

1°) Interpréter la matrice des corrélations.

2°) On lance l'ajustement du modèle de régression multiple expliquant le prix médian des maisons par toutes les variables quantitatives disponibles. Le résultat est le suivant :

```
lm(formula = medv ~ rm + age + lstat + crim)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-18.105  -3.501  -1.143   1.968  28.180

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -2.34910    3.17079  -0.741  0.45913
rm           5.11625    0.45083  11.349  < 2e-16 ***
age             ?       0.01116   1.129     ??
lstat       -0.61258    0.05642 -10.857  < 2e-16 ***
crim        -0.10639    0.03216  -3.308  0.00101 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 5.488 on 501 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6468,Adjusted R-squared:  0.6439
F-statistic: 229.3 on 4 and 501 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

2.a) Donner le modèle de régression ainsi que ses hypothèses.

2.b) Que vaut le coefficient estimé $\widehat{\beta}_{age}$?

2.c) Donner une estimation de la variance de l'erreur σ^2 ?

2.d) Rappeler la statistique de test et tester la nullité des paramètres séparément au seuil de 5 %.

2.e) Rappeler la statistique de test et tester la nullité simultanée des paramètres au seuil de 5 %.

3°) On décide de retirer la variable "age" du modèle, on relance l'estimation et on obtient le résultat suiva

```
lm(formula = medv ~ rm + lstat + crim)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-17.925  -3.566  -1.157   1.906  29.024

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -2.56225    3.16602  -0.809  0.41873
rm           5.21695    0.44203  11.802  < 2e-16 ***
lstat       -0.57849    0.04767 -12.135  < 2e-16 ***
crim        -0.10294    0.03202  -3.215  0.00139 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 5.49 on 502 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6459,Adjusted R-squared:  0.6437
F-statistic: 305.2 on 3 and 502 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

3.a) Comparer le R^2 de ce nouveau modèle et le R^2 du modèle précédent ?

3.b) En se basant sur le critère du R^2 ajusté, ce nouveau modèle est-il moins pertinent que le précédent ?

3.c) Que nous indique le résultat du test de Fisher global présenté dans la sortie ?

3.d) Par rapport au contexte de l'exercice, comment interpréter le fait que le coefficient associé à la variable "rm" soit positif ? Inversement, comment interpréter le fait que les coefficients associés aux variables "lstat" et "crim" soient négatifs ?

Exercice 2

1°) Nous considérons le modèle de régression linéaire

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

où $Y \in \mathbb{R}^n$, X est une matrice de taille $n \times p$ de rang p, $\beta \in \mathbb{R}^p$ et $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$

1.a) Qu'appelle-t-on estimateur des moindres carrés $\hat{\beta}$ de β ? Rappeler sa formule.

1.b) Quelle est l'interprétation géométrique de $\hat{Y} = X\hat{\beta}$ (faites un dessin) ?

1.c) Rappeler espérances et matrices de covariance de $\hat{\beta}, \hat{Y}$ et $\hat{\varepsilon}$

2°) Nous considérons dorénavant un modèle avec 4 variables explicatives (la première variable étant la constante). Nous avons observé:

$$X'X = \begin{pmatrix} 100 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X'Y = \begin{pmatrix} -60 \\ 20 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y'Y = 159$$

2.a) Estimer β et σ^2

2.b) Donner un estimateur de la variance de $\hat{\beta}$

2.c) Donner un intervalle de confiance pour β_2, au niveau 95%.

2.d) Calculer un intervalle de prévision de y_{n+1} au niveau 95% connaissant : $x_{n+1,2} = 3, x_{n+1,3} = 0.5$ et $x_{n+1,4} = 2$.

Bon courage !!!

Table de la Loi de Student à ν degrés de liberté

ν \ α	0,900	0,500	0,300	0,200	0,100	0,050	0,020	0,010	0,001
1	0,1584	1,0000	1,9626	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6193
2	0,1421	0,8165	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	0,1366	0,7649	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,9240
4	0,1338	0,7407	1,1896	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	0,1322	0,7267	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	0,1311	0,7176	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	0,1303	0,7111	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	0,1297	0,7064	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	0,1293	0,7027	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	0,1289	0,6998	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	0,1286	0,6974	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	0,1283	0,6955	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	0,1281	0,6938	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	0,1280	0,6924	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	0,1278	0,6912	1,0735	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	0,1277	0,6901	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	0,1276	0,6892	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	0,1274	0,6884	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	0,1274	0,6876	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	0,1273	0,6870	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	0,1272	0,6864	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	0,1271	0,6858	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	0,1271	0,6853	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	0,1270	0,6848	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	0,1269	0,6844	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	0,1269	0,6840	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	0,1268	0,6837	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	0,1268	0,6834	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	0,1268	0,6830	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	0,1267	0,6828	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
40	0,1265	0,6807	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
60	0,1262	0,6786	1,0455	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
80	0,1261	0,6776	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
120	0,1259	0,6765	1,0409	1,2886	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
∞	0,1257	0,6745	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,2905

Table de la Loi de Fisher-Snedecor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté ($\alpha = 0.05$)

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,72	2,65	2,57	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,62	2,54	2,47	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,67	2,53	2,46	2,38	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,19	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,31	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,23	2,16	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,11	2,03	1,94	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,19	2,04	1,96	1,87	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	2,03	1,87	1,78	1,69	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,95	1,79	1,70	1,60	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,03	1,93	1,77	1,68	1,57	1,28
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,67	1,57	1,46	1,00

Université Nice Côte d'Azur

Examen de probabilités

Date : 14/04/25

Durée : 3 heures

Instructions

- Veuillez lire chaque question attentivement.
- Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez.
- On rappelle que :
  - X suit une loi uniforme sur $[a,b]$ si X a pour densité $t \mapsto \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(t)$. On note $X \sim \mathcal{U}([a,b])$.
  - X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si X a pour densité $t \mapsto \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$. On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
  - X suit une loi binomiale de paramètre (n,p) sur $\{0,\dots,n\}$ si $\mathbb{P}[X=k] = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. On note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.
  - X suit une loi Gaussienne de paramètre (m,σ) si X a pour densité $t \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2})$. On note $X \sim \mathcal{N}(n,\sigma)$.

Exercice 1. Questions de cours

1. Donner la définition d'une mesure positive.
2. Énoncer le théorème de convergence dominée.
3. Donner la définition d'une tribu produit.
4. Énoncer le théorème de Fubini-Lebesgue.
5. Donner la définition de la loi d'une variable aléatoire.
6. Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes (sans donner de justifications).
   (a) Pour toute variable aléatoire réelle X, on a $\mathbb{V}\mathrm{aR}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$
   (b) Pour toute variable aléatoire X, positive et intégrable, et tout $\alpha \geq 0$, $\mathbb{P}[X \leq \lambda] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}$.
   (c) Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors $X+Y$ a pour loi $P_X * P_Y$.
   (d) Si $X_1,\dots,X_n$ sont des variables aléatoires de densité respectives $p_1,\dots,p_n$, alors $(X_1,\dots,X_n)$ a pour densité $\prod_{i=1}^n p_i$.

Exercice 2. Calculs de lois

1. Soient $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$, et $Y \sim \mathcal{E}(1)$. Montrer que X et Y/λ suivent la même loi.
2. Soit $X \sim \mathcal{B}(2n, 1/2)$. Déterminer $\mathbb{P}(|X-n| = k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
3. Soient U de loi uniforme sur $[0,1]$ et X de loi exponentielle de paramètre 1 deux variables aléatoires réelles indépendantes. Calculer $\mathbb{P}(sup(U,X) \leq t)$ dans les 3 cas suivants : $t < 0$, $t \in [0,1]$, $t > 1$.
4. Soit (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de densité $(x,y) \mapsto \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{1+(1+x^2)^2y^2}$. Calculer la loi de X.
5. Soient U suivant une loi exponentielle de paramètre 1 et V suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. On suppose U et V indépendantes.
   (a) Calculer la densité du couple $(X,Y) = (\sqrt{U}\cos(2\pi V), \sqrt{U}\sin(2\pi V))$.
   (b) Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 3. Quelques applications de Fubini

1. Soit X une variable aléatoire réelle positive. Montrer que $\mathbb{E}[X] = \int_{t=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq t)\mathrm{d}t$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer $P(X > Y)$.

Exercice 4. Vecteur aléatoire et marginales Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi a pour densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{4}(1 + xy)\mathbf{1}_{1 \leq x, y \leq 5}.$$

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{X<1/2}]$.
3. Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right]$.
4. Calculer $\mathbb{E}[XY]$.
5. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$. Le résultat est-il surprenant ?
6. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5. Retour sur Borel-Cantelli
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace mesuré. Soient $A_0, A_1, \ldots \in \mathcal{F}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$. On remarque que pour tout n, $B_{n+1} \subseteq B_n$. On note $C = \bigcap_{n>0} B_n$.

(a) Montrer que si $\sum_{n>0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(C) = 0$.

(b) On suppose désormais que $\sum_{n>0} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ et que les A_n sont indépendants (et donc les A_n^c sont aussi indépendants).

i. Montrer que pour tous q, n tels que $n \leq q$, $B_n^c \subseteq \bigcap_{n \leq k \leq q} A_k^c$.

ii. Montrer que pour tous q, n tels que $n \leq q$, $\mathbb{P}(B_n^c) \leq \prod_{n \leq k \leq q} \mathbb{P}(A_k^c)$.

iii. En utilisant l'inégalité $\forall x \in [0, 1], (1 - x) \leq e^{-x}$, montrer que pour tous q, n tels que $n \leq q$,

$$\mathbb{P}(B_n^c) \leq \exp\left(-\sum_{n \leq k \leq q} \mathbb{P}(A_k)\right).$$

iv. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(B_n^c) = 0$.

v. Montrer que $\mathbb{P}(C) = 1$.

Exercice 6. Ruine du joueur

Soit $N \geq 2$ et $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. Un joueur qui dispose d'une somme de k euros, avec $k \in [0, N]$, joue à un jeu de pile ou face avec les règles suivantes. Il lance successivement une pièce de monnaie. À chaque lancer, avec probabilité p, la pièce tombe sur pile et le joueur gagne 1 euro ; et avec probabilité q, la pièce tombe sur face et le joueur perd 1 euro. Les lancers sont indépendants les uns des autres et le jeu s'arrête lorsque le joueur possède N euros ou lorsqu'il est ruiné. On note p_k la probabilité que le joueur d'être ruiné s'il possède la somme de k euros au départ.

1. Déterminer p_0, p_N.
2. Démontrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, N - 1\}$, on a

$$p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}.$$

3. En déduire la valeur de p_k pour $k \in \{0, \ldots, N\}$.

Université des Lagunes
Mention : Mathématiques appliquées
Niveau : Licence 3
UE : Probabilité Avancée

Année Académique : 2024/2025

Devoir
Durée : 1H30

Exercice 1
Soient A et B deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme $\mathscr{U}([0,1])$. *Quelle est la probabilité que le polynôme* $X^2 - 2AX + B$ *ait :*

1. *deux racines réelles distinctes,*
2. *deux racines complexes et non réelles,*
3. *une racine double.*

Exercice 2
Soit $(U_k)_{\mathbb{N}}$ *une suite indépendante de v.a.r. de loi normale centrée et de variance* $\sigma^2 > 0$. *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, *on définit la suite* $(X_k)_{\mathbb{N}}$ *par la relation de récurrence* $X_n = \theta X_{n-1} + U_n$, *pour tout* $n \geq 1$, *avec* $X_0 = 0$.

1. *Déterminer pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la loi de la v.a.r.* X_n.
2. *Etudier la convergence en loi de la suite de v.a.r.* $(X_k)_{\mathbb{N}}$.

Exercice 3
Soient X *et* Y *deux variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Pareto de paramàtre 2 c'est-à-dire qui possède la densité* $p(x) = \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{\{x>1\}}$. *On pose*

$$(Z, W) = \left(\ln(X), 1 + \frac{\ln(Y)}{\ln(X)}\right)$$

1. *Quelle est la loi du couple* (Z, W) *? Les variables* Z *et* W *sont-elles indépendantes ?*
2. *Quelle est la loi de* W *?*
3. *Quelle est la loi de* Z *?*

Université des Lagunes

Licence 3

UFR Sciences et techniques

Année Universitaire : 2024–2025

TD N° 2 – MESURE ET INTEGRATION

Fonctions mesurables - Intégration

Consignes

Les exercices doivent être préparés et résolus par les étudiants.

EXERCICE 1 Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures sur un espace mesurable $(X,\mathcal{T})$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}\mu_n$ est une mesure sur $(X,\mathcal{T})$.

Rappel : Si $(a_{n,p})_{n,p}$ une suite double de réels positifs alors $\sum_n \sum_p a_{n,p} = \sum_p \sum_n a_{n,p}$

EXERCICE 2 Pour $a\in\mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac en a sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Soit $\mu_1 := \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2 + \frac{1}{4}\delta_3$. Justifier que μ_1 est une mesure sur $((\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Calculer $\mu_1\left(\left[0,\frac{3}{2}\right]\right)$. Montrer que μ_1 est une probabilité sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. Soit $\mu_2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{2^n}\delta_n$. Justifier que μ_2 est une mesure sur $((\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Calculer $\mu_2(\{1,2,\cdots,k\})$ pour tout $k\geq 1$. En déduire $\mu_2(\mathbb{N})$.
3. Soit $\mu_3 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\delta_{\frac{1}{\sqrt{n}}}$. Justifier que μ_3 est une mesure sur $((\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Calculer $\mu_3\left(\left[\frac{1}{2},2\right]\right)$. Calculer $\mu_3(\mathbb{R})$.

EXERCICE 3 Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace mesurable et $A\subset\Omega$. Montrer que la fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$ de A est mesurable si et seulement si $A\in\mathcal{A}$.

EXERCICE 4 Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace mesurable et $f:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ une application. On définit pour tout entier non nul n la fonction f_n par

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)|<n \\ n & \text{si} \quad f(x)\geq n \\ -n & \text{si} \quad f(x)\leq -n. \end{cases}$$

Montrer que f est mesurable si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est mesurable.

EXERCICE 5 Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace mesurable.

1. Soit $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$ mesurable, montrer que $|f|$ est mesurable.
2. En supposant que $\mathcal{T}\neq\mathcal{P}(X)$, montrer que la réciproque est fausse.

EXERCICE 6 On considère la famille $\mathcal{T}$ formée des parties A de $\mathbb{Z}$ vérifiant la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2n \in A \Leftrightarrow 2n+1 \in A.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{Z}$ contenue strictement dans $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
2. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $\varphi(n) = n+2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, est bijectice, $(\mathcal{T},\ \mathcal{T})$-mesurable et φ^{-1} n'est pas $(\mathcal{T},\ \mathcal{T})$-mesurable.

EXERCICE 7

1. Quelles sont les applications mesurables h de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ lorsque $\mathcal{A}$ est la tribu grossière ? lorsque $\mathcal{A}$ est la tribu triviale ?
2. Soient f et g des fonctions de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que les fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont aussi $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

EXERCICE 8 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = 5 \cdot \mathbf{1}_{[-1,2[}(x) - 2 \cdot \mathbf{1}_{[1,4[}(x)$.

1. La fonction f est-elle étagée ? Si oui, trouver une représentation canonique de f.
2. Décrire explicitement l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 4\}$.

EXERCICE 9 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables et positives sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, qui converge simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe n_0 tel que $\int_X f_{n_0} \mathrm{d}\mu < +\infty$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu$ et que $\int_X f_n \mathrm{d}\mu < +\infty$.

Peut-on supprimer l'hypothèse $\int_X f_{n_0} \mathrm{d}\mu < +\infty$? Si non donner un contre exemple.

EXERCICE 10 Soit $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$ l'espace mesuré, où m est la mesure de dénombrement sur $\mathbb{N}$ définie par $m(A) = \mathrm{card}(A)$ pour toute partie A de $\mathbb{N}$. Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ une application. Montrer que f est mesurable puis expliciter la valeur de $\int_{\mathbb{N}} f dm$.

EXERCICE 11 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_n$ une suite de fonctions μ-intégrables de Ω dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-intégrable. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n| d\mu = \int_\Omega |f| d\mu \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0.$$

EXERCICE 12 Sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on considère la suite de fonctions $f_n = \dfrac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]} - \dfrac{1}{n}\mathbf{1}_{[-n,0]}$.

a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers une fonction f que l'on déterminera.

b) Montrer que f et chaque f_n sont intégrables.

c) Les égalités suivantes sont-elles vraies ?

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\lambda = 0.$$

On remarquera que dans cette question, pour chacune des fonctions g considérées, on a $\int_{\mathbb{R}} g d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$.)

EXERCICE 13 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x}}{1+nx}, \qquad \forall x \in [0, +\infty[.$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

EXERCICE 14

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{n}{1+x^2}\sin\left(\frac{x}{n}\right), \qquad \forall x \in [0,1].$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

EXERCICE 15 Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1-\cos^n(x)}{1+x^2}, \qquad \forall x \in]0, +\infty[.$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

EXERCICE 16 Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}\frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}}, \qquad \forall x \in]0, +\infty[.$$

1. Montrer pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ existe et l'exprimer en fonction de $S = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = +\infty$. Expliquer pourquoi le théorème de la convergence dominée ne s'applique pas.

1) • $\left| \frac{\sin(x)}{x^2} \frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}} \right| \leq \frac{1}{x^2}$

• $\left| \frac{\sin x}{x^2} \frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}} \right| \underset{0}{\sim} \frac{1}{x} x^{1/n} = \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}}$

Devoir de Maison

Exo 12 à rendre

2) • On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable

• $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\sin x)}{x^2} \frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}} =$

$= \frac{\sin x}{2x^2} = f(x)$

• $|f_n(x)| = \left| \frac{\sin(x)}{x^2} \frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ et

$x \mapsto 1/x^2$ intégrable sur $[1, +\infty[$.

UNIVERSITÉ DES LAGUNES
Année 2023-2024

Durée : 2 h 00 mn

Licence 2 : Sciences et Technologie

Examen - Session 1

Topologie - Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1
Soit $E =]0; +\infty[$. On définit sur $E \times E$ l'application d par

$$d(x,\, y) = |\ln(x) - \ln(y)|.$$

1. Montrer que d est une distance sur E.
2. Déterminer la boule fermée de centre $x = \dfrac{1}{3}$ et de rayon $r = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2
On considère la fonction f définie par $f(x,\, y) = xy\ln(x^2 + y^2)$.

1. Montrer que pour tout $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$
2. Déterminer l'ensemble de définition de f.
3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité au point $(0,\, 0)$? (Justifier votre réponse.)

Exercice 3
On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,\, y) = \frac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,\, y) \neq (0,\, 0) \quad \text{et } f(0,\, 0) = 0.$$

1. Etudier la continuité de f au point $(0,\, 0)$.
2. Etudier l'existence des dérivées partielles premières de f au point $(0,\, 0)$.
3. Etudier la différentiabilité de f au point $(0,\, 0)$.

Exercice 4
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles par

$$f(x,\, y) = xy - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Donner la nature de chaque point critique de f.

UNIVERSITÉ DES LAGUNES
Année 2024-2025 **Durée : 2 h 30 mn**

Licence 3 : Sciences et Technologie
Devoir de Topologie

La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)
Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{T}$ un ensemble de parties de X.

1. Rappeler les axiomes qui font de $\mathcal{T}$ une topologie sur X.
2. On suppose à présent que $X = \mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs et
$$\mathcal{T} = \{\emptyset,\ \{1, 2\},\ \{1, 2, 3\}, \{2, 3, -4\}, \{1, 2, 3, -4\}, \mathbb{Z}\}.$$
Est-ce que $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ est un espace topologique ? (Justifier votre réponse.)

Exercice 2 (7 points)
Soit (X, d) un espace métrique.

1. Prouver que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) Toute partie de X est à la fois ouverte et fermée.
   (b) Toute partie de X est ouverte.
   (c) Toute partue de X est fermée.
   (d) Tout singleton de X est ouvert.
   Si l'une des assertions ci-dessus est vérifiées, l'espace métrique (X, d) est dit discret.
2. On suppose que pour tout $(x, y) \in X$:
$$d(x, y) = 0 \text{ si } x = y \text{ et } d(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y.$$
   (a) Montrer que d est une distance sur X.
   (b) Soient $r > 0$ et $x \in X$. Déterminer, avec précision, la boule ouverte de centre x et de rayon r.
   (c) Montrer que (X, d) est discret.

Exercice 3 (5 points)
Soient X et Y deux espaces topologiques séparés et $g : X \to Y$ une bijection continue.

1. Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in X$.
Montrer que l'ensemble
$$C = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$
est un compact de X.
2. Montrer que si X est compact alors g est un homéomorphisme.

Exercice 4 (4 points)
Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique . Soient A une partie connexe de X, $\overline{A}$ l'adhérence de A et B une partie de X.

1. Montrer que $A \subset B \subset \overline{A}$ implique B connexe.
2. En déduire que $\overline{A}$ est connexe.

UNIVERSITÉ DES LAGUNES
Année 2024-2025 **Durée : 1 h 30 mn**

Licence 3 : Sciences et Technologie
Devoir d' Analyse 3

La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (6 points)
On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

1. Déterminer la limite simple f de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est-elle uniforme sur $[0,\, 1]$?
3. Les fonctions f_n sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 (6 points)
Calculer $\displaystyle\int\int_D f(x,\, y)dx\, dy$, où

$$D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0\} \quad \text{et } f(x,\, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Exercice 3 (8 points)
On considère la fonction g définie par

$$g(x,\, y) = \frac{1}{x(1 + (\ln x)^2)} \text{ si } x > 0 \text{ et } g(x) = 0 \text{ si } x \leqslant 0.$$

Sans faire mention des intégrales de Bertrand, montrer que :

1. $g \in L^1(\mathbb{R})$;
2. pour tout $p \in]1,\, +\infty[$, g n'appartient pas à $L^p(\mathbb{R})$.

$\left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p dx\right)^{1/p} < +\infty$ $= \|g\|_p$

UNIVERSITÉ DES LAGUNES
Année 2024-2025

Durée : 1 h 30 mn

Licence 3 : Sciences et Technologie

Devoir d' Analyse 3

La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (6 points)

On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

1. Déterminer la limite simple f de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est-elle uniforme sur $[0,\, 1]$?
3. Les fonctions f_n sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 (6 points)

Calculer $\displaystyle\int\int_D f(x,\, y)\,dx\,dy$, où

$$D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0\} \quad \text{et} \quad f(x,\, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice 3 (8 points)

On considère la fonction g définie par

$$g(x,\, y) = \frac{1}{x(1 + (\ln x)^2)} \text{ si } x > 0 \text{ et } g(x) = 0 \text{ si } x \leqslant 0.$$

Sans faire mention des intégrales de Bertrand, montrer que :

1. $g \in L^1(\mathbb{R})$;
2. pour tout $p \in]1,\, +\infty[$, g n'appartient pas à $L^p(\mathbb{R})$.

$\left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p\, dx\right)^{1/p} < +\infty$ $= \|g\|_p$

UNIVERSITE DES LAGUNES **ANNEE 2023-2024**
Licence 2
Faculté de Sciences et Technologie
Programmation Linéaire 1

Examen : Durée 02h

Exercice 1 (0 7points)
Les questions sont indépendantes.

1) Quelles sont les étapes de la modélisation en programmation linéaire ?
2) Quelle est l'utilité des variables d'écarts en programmation linéaire ?
3) Quand dit on qu'un programme linéaire est sous forme canonique par rapport à un base ?
4) Citer deux méthodes de resolution d'un programme linéaire.
5) On considère le problème linéaire suivant :

$$(PL)\begin{cases} Min\ Z = 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Donner toutes les bases possibles de (PL).
b) Déterminer les bases de (PL) qui sont réalisables et dégénéré.
c) Donner une base réalisable optimale de (PL).

Exercice 3 (06 points)
On donne le programme linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} MinZ = 2x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) Ecrire le programme dual (D) de ce prgramme linéaire (P)
2) $X^* = (1, 6)^t$ est-elle une solution optimale de (P) ?
3) Resoudre le programme dual (D) obtenu en 1) et déduire une solution optimale du programme linéaire (P).

Tournez la page S.V.P. OK

Exercice 3(07 points)

Nous souhaitons établir un horaire quotidien, sachant que chaque jour est divisé en périodes et en supposant que nous avons pu estimer un nombre minimum d'employés devant être affecté durant chaque période. Chaque jour est divisé en quarts de travail de 8 heures. Plusieurs quarts partagent une même période, mais chaque quart exige un salaire particulier. Les données du problème horaire du personnel sont données dans la table suivant :

	Période	Quart 1	Quart 2	Quart 3	Quart 4	Quart 5	Minimum employés
1	6-8	X					48
2	8-10	X	X				79
3	10-12	X	X				65
4	12-14	X	X	X			87
5	14-16		X	X			64
6	16-18			X	X		73
7	18-20			X	X		82
8	20-22				X		43
9	22-24				X	X	52
10	0-6					X	15
	Salaire	190	160	175	180	195	

Modéliser sans resoudre le problème en programmation linéaire permettant de savoir combien d'employés doit-on affecter à chaque quart de travail de façon à minimiser le total des salaires versés, en respectant le nombre minimum d'employés pour chaque période.

UNIVERSITE DES LAGUNES **ANNEE 2023-2024**
Licence 2
Faculté de Sciences et Technologie
Programmation Linéaire 1

Examen : Durée 02h

Exercice 1 (0 7points)
Les questions sont indépendantes.

1) Quelles sont les étapes de la modélisation en programmation linéaire ?
2) Quelle est l'utilité des variables d'écarts en programmation linéaire ?
3) Quand dit on qu'un programme linéaire est sous forme canonique par rapport à un base ?
4) Citer deux méthodes de resolution d'un programme linéaire.
5) On considère le problème linéaire suivant :

$$(PL) \begin{cases} Min\ Z = 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Donner toutes les bases possibles de (PL).
b) Déterminer les bases de (PL) qui sont réalisables et dégénéré.
c) Donner une base réalisable optimale de (PL).

Exercice 3 (06 points)
On donne le programme linéaire suivant :

$$(P) \begin{cases} MinZ = 2x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) Ecrire le programme dual (D) de ce prgramme linéaire (P)
2) $X^* = (1, 6)^t$ est-elle une solution optimale de (P) ?
3) Resoudre le programme dual (D) obtenu en 1) et déduire une solution optimale du programme linéaire (P).

Tournez la page S.V.P. OK

Exercice 3(07 points)

Nous souhaitons établir un horaire quotidien, sachant que chaque jour est divisé en périodes et en supposant que nous avons pu estimer un nombre minimum d'employés devant être affecté durant chaque période. Chaque jour est divisé en quarts de travail de 8 heures. Plusieurs quarts partagent une même période, mais chaque quart exige un salaire particulier. Les données du problème horaire du personnel sont données dans la table suivant :

	Période	Quart 1	Quart 2	Quart 3	Quart 4	Quart 5	Minimum employés
1	6-8	X					48
2	8-10	X	X				79
3	10-12	X	X				65
4	12-14	X	X	X			87
5	14-16		X	X			64
6	16-18			X	X		73
7	18-20			X	X		82
8	20-22				X		43
9	22-24				X	X	52
10	0-6					X	15
	Salaire	190	160	175	180	195	

Modéliser sans resoudre le problème en programmation linéaire permettant de savoir combien d'employés doit-on affecter à chaque quart de travail de façon à minimiser le total des salaires versés, en respectant le nombre minimum d'employés pour chaque période.

Université des Lagunes /Année 2023 - 2024/.

Licence 2 Maths Appliquées
Durée: **1 h 40 mn**

Examen - Algèbre linéaire - Session 1

NB: la clarté de la rédaction sera notée!
Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (8 points)

Parmi les 5 propositions suivantes, lesquelles sont vraies ou fausses ? Justifiez les réponses par une preuve si vous estimez qu'une assertion est vraie et par un contre-exemple si vous pensez que c'est faux. Notez qu'aucun point ne sera accordé sans justification même en cas de réponse correcte.

1. Toute matrice carrée d'ordre $n \geq 2$, à coefficients dans $\mathbb{R}$, a au moins une valeur propre réelle.

2. Si deux matrices carrées d'ordre n, à coefficient dans un corps K, ont même polynôme caractéristique alors elles sont semblables.

3. Soit u un endomorphisme d'un K-e-v E de dimension finie. u est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de u, scindé et ne possédant que des racines simples.

4. Si deux matrices carrées d'ordre n, à coefficient dans un corps K, ont même polynôme caractéristique alors elles ont le même déterminant.

Exercice 2 (12 points)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Justifier sans calculs que la matrice A est diagonalisable.

2) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$.

3) Application : trouver au moins une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (à coefficients eventuellement complexes) qui vérifie l'équation matricielle $B^2 = A$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression explicite de la matrice A^n.

Ministère de l'Enseignement Supérieur **Et de la Recherche Scientifique** --------------- **Université des Lagunes** ---------- **Faculté de Sciences et Technologie** ---------- **Licence 2** ---------- **Année universitaire 2023-2024**	**République de Côte d'Ivoire** ----------- Union-Discipline-Travail

Examen de Comptabilité

(Semestre 3)

Enseignant : BEDA Arih Clotaire

Février 2024
Durée : 2h00 – documents non autorisés

PREMIERE PARTIE : QUESTIONS DE COURS

Marquez Vrai ou Faux avec le signe de votre choix

N°	Affirmation	V	F
1	La dotation aux amortissements est une charge.		
2	Le solde du compte 28 créditeur s'enregistre au passif du bilan.		
3	Aucune immobilisation ne peut avoir comme coût d'entrée une valeur nulle.		
4	L'amortissement dérogatoire s'inscrit au passif du bilan, dans les capitaux propres.		
5	Lorsque l'amortissement fiscal est supérieur à l'amortissement comptable, l'entreprise constate une reprise d'amortissement dérogatoire.		
6	L'amortissement fiscal accéléré consiste à doubler l'amortissement comptable du 1er exercice.		
7	L'amortissement par unité d'œuvre ou de production peut conduire à la constatation d'une dotation aux amortissements nulle sur un exercice.		
8	La reprise d'amortissement est un produit de l'exercice.		
9	Les modes d'amortissement dégressif ont pour objectif de permettre à l'entreprise de constater des charges moins importantes en début d'amortissement.		
10	La dotation aux amortissements dérogatoires est une charge ordinaire.		

DEUXIEME PARTIE : EXERCICE

Etat de rapprochement bancaire

A- Le relevé de compte envoyé par la SGBCI à son client IVOIRIA se présente comme suit au 31/10/N

DATE	OPERATIONS	DEBIT	CREDIT
30/09/N	Solde à nouveau		240 700
08/10/N	Remise effet n°777		130 000
10/10/N	Votre remise de chèque sur SARR		87 000
12/10/N	Chèque n°125	18 500	
18/10/N	Virement du client KODJO		32 000
20/10/N	Chèque n° 126	150 000	
21/10/N	Virement du client BAH		99 000
30/10/N	Domiciliation COFRUITEL	145 000	
31/10/N	Virement du client DIA		50 000
31/10/N	**Solde créditeur**	**325 000**	

B- Le compte SGBCI tenu par IVOIRIA se présente comme suit au 31/10/N

DATE	OPERATIONS	DEBIT	CREDIT
01/10/N	Solde à nouveau	240 700	
08/10/N	Remise de chèque	87 000	
09/10/N	Négociation effet n°777	130 000	
10/10/N	Cheque n°125		18 700
18/10/N	Cheque n°126		150 000
24/10/N	Virement du client BAH	99 000	
29/10/N	Versement espèces	100 000	
31/10/N	Chèque n°127		47 000
	Solde débiteur		**441 000**
	Total	656 700	656 700

TRAVAIL A FAIRE:

1- Présenter l'état de rapprochement bancaire

2- Passer les écritures de régularisation nécessaires au 31/10/N

NB: les montants du relevé bancaire sont exacts

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

....

Année Scolaire 2023-2024

UL

EXAMEN LANGAGE C

Licence 2

Durée : 02H 00 – Semestre 3 – Session 1 : Mars

Exercice 1 (4 pts)

Écrire un programme en C qui permet de saisir 10 entiers et qui permet de calculer la différence entre la somme des éléments paires et la somme des éléments impaires

Exercice 2 (4 pts)

1- Écrire une fonction en langage **C** **inv(float x)** qui calcul l'inverse d'un nombre non nul

2- En déduire un programme principal qui exploite cette fonction pour résoudre le problème suivant :

- Données : un nombre entier positif n
- Résultat : le résultat de la suite harmonique :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Exercice 3 (4 pts)

Écrire un programme en langage c qui :

- Rempli un tableau de dimension 1 de 10 composante au clavier
- Tri le le tableau (tri bulle)
- Affiche le tableau trie

Problème : (8 pts)

On cherche à calculer la moyenne, la médiane et l'écart-type d'une série de valeurs stockées dans un tableau de dimension 1.

Pour cela, on vous demande d'écrire un algorithme qui permet de :

- Lire la dimension du vecteur tel que $n \leq Nmax = 50$;
- Lire le vecteur V à éléments réels ;
- Calculer et Afficher la moyenne et l'ecart-type
- Calculer et Afficher la médiane ainsi que sa position dans V

Université des Lagunes

Faculté des sciences et technologies

Devoir de statistique 2

Année universitaire 2023-2024

Niveau : Licence 2

Durée : 02h00

EXERCICE 1 :

Soient $\theta > 0$ un paramètre inconnu et X une variable aléatoire de densité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer un estimateur $\widehat{\theta}_n$ de θ par la méthode des moments construit à partir d'un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de X.
2. Etudier les propriétés de $\widehat{\theta}_n$ (biais, consistance et efficacité).
3. On pose $T_n = \max(X_1, ..., X_n)$.

(a) Déterminer la densité de probabilité de T_n.

(b) Etudier les propriétés de T_n (biais et consistance).

(c) Proposer un autre estimateur sans biais Z_n de θ. L'estimateur Z_n est-il consistant ?

4. Lequel des deux estimateurs ($\widehat{\theta}_n$ ou Z_n) choisiriez-vous pour estimer θ ?

EXERCICE 2 :

Un supermarché se fournit en oeufs chez un éleveur. Le directeur du supermarché s'intéresse à la proportion p des oeufs dont le poids dépasse 63 grammes. On extrait au hasard n oeufs et à chaque oeuf i, on associe une variable aléatoire X_i qui prend la valeur 1 avec la probabilité p si l'oeuf pèse plus de 63 grammes et la valeur 0 dans le cas contraire. On obtient ainsi un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ d'une variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et en déduire un estimateur $\widehat{p}_n$ de p par la méthode des moments.
2. Etudier les propriétés de $\widehat{p}_n$ (biais, efficacité et convergence).
3. On a extrait au hasard 225 oeufs de la production ; parmi ceux-ci, 180 oeufs pèsent plus de 63 grammes. Donner une estimation ponctuelle de p.
4. Déterminer un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance $0,95$.
5. Déterminer la taille de l'échantillon pour que la longueur de l'intervalle de confiance précédent ne dépasse pas $0,01$ en supposant que l'estimation de p de la question 3 ne varie pas quelque soit n.

EXERCICE 3 :

Les poids (en grammes) de dix souris sont les suivants : 53 ; 40 ; 33 ; 43 ; 39 ; 46 ; 42 ; 39 ; 50 ; 45. On suppose que le poids des souris suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 7.6$.

1. Proposer un estimateur sans biais de la moyenne μ. En déduire une estimation ponctuelle de la moyenne μ.
2. Déterminer un intervalle de confiance de la moyenne μ avec un niveau de confiance de 95%.

Données de l'examen :

Quantiles de la loi de Student : $t^{(10)}_{0.95} = 1.81$, $t^{(10)}_{0.975} = 2.23$, $t^{(9)}_{0.95} = 1.83$, $t^{(9)}_{0.975} = 2.26$.

Quantiles de la loi normale centrée réduite : $z_{0.95} = 1.645$, $z_{0.975} = 1.96$.

Travaux dirigés 2
Algorithme et structure de données
Licence 2
Année académique 2023-2024

Enregistrements-Fichiers-Piles-Files

Exercice 1 : Enregistrements

Un des services médicaux dans un hôpital étatique décide d'automatiser son archive. Pour cela il estime d'enregistrer les fiches de ses patients sur l'ordinateur en adaptant une structure hétérogène. Cette dernière doit comporter les informations suivantes :

- Un identifiant du dossier (entier)
- Un Nom (chaine de 25 caractères) et un prénom (25 caractères)
- Un numéro d'assurance (10 caractères maximum)
- Un numéro de tel (14 caractères maximum)
- Une adresse (Rue, désignation, commune, wilaya=code sur 2 chiffres)
- Description de la maladie
- Date d'entrée et date de sortie (JJ.MM.AA)

Ecrire un algorithme qui permet de faire l'enregistrement de n patients de ce service.

Exercice 2 :

Un compte CCP concernant un étudiant de la fac est spécifié par les données suivantes :

- Nom et prénom de propriétaire de compte
- Numéro de compte
- Montant en lettres
- Montant en chiffres
- Nom et prénom de bénéficiaire

1- Déclarer le type de cette structure
2- Saisir les informations pour 20 étudiants.

Exercice 3 : Fichiers

Considérons le type enregistrement suivant :

```
Type
        Etudiant = Enregistrement
                Matricule : entier ;
                Nom, Prénom : chaine [20] ;
                Moyenne : réel ;
        Fin;
```

Soit T un tableau d'au plus 100 étudiants.
Ecrire un algorithme permettant de recopier tous les étudiants admis appartenant à T dans un fichier ADMIS de type étudiant.
NB : Un étudiant est admis si sa moyenne est supérieure ou égale 10.

Exercice 4 : Piles et Files

$\lim\limits_{n\to\infty} n a^n = \begin{cases} 0 \text{ si } a \in]-1;1[\\ +\infty \text{ si } a \geq 1 \\ \text{n'existe pas si } a \leq -1 \end{cases}$

Université des lagunes

UFR Sciences et techniques

Licence 2 : Mathématiques **Année Universitaire : 2023–2024**

Fiche N° 3 des Travaux dirigés d'Analyse 3

EXO 1 Soit α un nombre réel strictement positif. On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = nx^n(1-x)^\alpha$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$ et trouver sa limite.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0,1]$ vers sa limite si et seulement si $\alpha > 1$.
3. On suppose que $0 < \alpha \leq 1$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur le segment $[0,a]$ pour tout $a \in [0,1[$.

EXO 2 On considère la suite des fonctions f_n définies sur $[-1,1]$ par

$$f_n(x) = \sin(nx)e^{-nx^2} + \sqrt{1-x^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [-1,1].$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[\alpha,1]$ où $\alpha \in]0,1[$.
3. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.

EXO 3 Soit la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{e^n x}{1 + ne^n x^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à déterminer.
2. Calculer pour $n \geq 1$, $\int_0^1 f_n(x)dx$ et $\int_0^1 f(x)dx$. Utiliser cela pour déterminer si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément.
3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$, avec $a > 0$.

EXO 4 On considère la suite des fonctions f_n définies sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \sin\left(\sqrt{x^2 + 4\pi^2 n^2}\right) - \frac{x}{4n\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0,+\infty[.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0,+\infty[$.
3. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[0,\alpha]$ où $\alpha > 0$.

EXO 5 Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}, \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

RL Methods : • Monte Carlo
• State-action-reward-state-action (SARSA)
• Q-Learning

Markov. Decision process

• Deep reinforcement • Learning

EXO 6 On considère la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ où $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{1+n}$. pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geq 0$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. Soit $a > 0$. Montrer que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

   A-t-on une convergence normale sur $[0, +\infty[$? sur $]0, +\infty[$?
3. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

EXO 7 On considère la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ où $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.
2. Montrer que la série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Montrer que la série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur le segment $[\alpha, \frac{\pi}{2}]$ pour tout α vérifiant $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
4. Calculer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

EXO 8 On considère la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ où $f_n(x) = \frac{x}{n(n+x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ la somme de cette série lorsqu'elle existe.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est convergente sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ (f'_n est la dérivée de f_n.)
3. Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
4. Calculer $S(p)$ lorsque p est un entier positif ou nul. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.

EXO 9 On considère la série de fonctions dont le terme général f_n est défini par

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

On note f la fonction qu'elle définit lorsqu'elle converge.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $[0, +\infty[$.
2. Prouver que f est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$.

Université des lagunes

UFR Sciences et techniques

Licence 2 : Maths-Info **Année Universitaire : 2023–2024**

Fiche N° 2 des Travaux dirigés d'Analyse 3

EXO 1 Etudier la nature des séries numériques suivantes :

a. $\sum_{n\geq 0} \frac{e^n}{n!}$ b. $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ c. $\sum_{n\geq 1} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{e}\right]$

$1+e+\frac{e^2}{2!}+\frac{e^3}{3!}+\dots\frac{e^n}{n!}$

d. $\sum_{n\geq 0} \frac{a^{n+1}2^{-n}}{2n+1}$ où $a \in \mathbb{R}$ e. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$ f. $\sum_{n\geq 1} \sin(n)\frac{\ln n}{n}$

g. $\sum_{n\geq 2} \ln n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ h. $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ i. $\sum_{n\geq 0} \sin(\pi\sqrt{4n^2+2})$

EXO 2 Etudier la convergence et calculer la somme des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$.

EXO 3 Déterminer l'ensemble des triplets (a, b, c) de nombres réels strictement positifs tels que la série $\sum_{n>0} u_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{an+b} - \frac{c}{n}$ soit convergente.

EXO 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite positive et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$.

1. Soit $\alpha > 0$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Comparer la convergence des séries numériques $\sum_{n>0} u_n$ et $\sum_{n>0} v_n$.
2. Dans le cas général, montrer que les séries $\sum_{n>0} u_n$ et $\sum_{n>0} v_n$ ne peuvent pas converger simultanément.

EXO 5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ convergente alors la série $\sum_{n>0} \frac{u_n}{n^2}$ converge.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ convergente si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.

EXO 6

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$, est convergente. On pose alors $\gamma = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
2. En déduire un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
3. Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{1+2+\cdots+n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.

Université des Lagunes **Année : 2023 / 2024**

–Licence 2 : Sciences et technologie *TD : Analyse 4*

Fiche 2 : Calcul différentuel dans $\mathbb{R}^n$–

Exercice 1 Etudier les limites en $(0,\ 0)$ des fonctions suivantes :

$$a)\ f(x,\ y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad b)\ f(x,\ y) = \frac{x+2y}{x^2-y^2} \qquad c) f(x,\ y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2}.$$

Exercice 2 On considère la fonction $f\ :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.

Exercice 3
On définit la fonction $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,\ y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \ \text{ si } (x,\ y) \neq (0,\ 0) \quad \text{et } f(0,\ 0) = 0.$$

1. Etudier l'existence des dérivées partielles premières de f au point $(0,\ 0)$.
2. Etudier la différentiabilité de f au point $(0,\ 0)$.
3. Etudier la continuité des dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? (Justifier votre réponse.)

Exercice 4 **(Non traité en TD)**
On considère la fonction $f\ :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier l'existence des dérivées partielles premières de f selon ses deux variables au point $(0,\ 1)$.
2. Etudier la différentiablité de f au point $(0,\ 1)$.

Exercice 5
On considère la fonction $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,\ y) = \left(x - \frac{1}{2}\sin y,\ y + \frac{1}{2}\sin x\right).$$

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice jacobienne de f.
3. Calculer la différentielle de f au point $a = (0, \pi)$ appliquée à $h = (2, 1)$ c'est-à-dire $df_a(h)$.
4. En utilisant le théorème des accroissements finis (d'une fonction réelle à valeurs réelles), montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

5. Montrer que que pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$,

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| \leq \frac{1}{2}\|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

6. En déduire que f est injective.

Exercice 6

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = \phi(x + y, x^2 + y^2).$$

Exprimer les dérivées partielles de g en $(2, 3)$ en fonction de celles de ϕ en un point bien choisi.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles par

$$f(x, y) = (x^2 - 2y^2)e^{x-y}.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Donner la nature de chaque point critique de f.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles par

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3mxy,$$

où m est un paramètre réel non nul.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Donner la nature de chaque point critique de f.

UNIVERSITÉ DES LAGUNES
ABIDJAN

Faculté des Sciences et Technologies

Licence 1 : Mathématiques   Année : 2023-2024

Examen session 1 de : Intégrales multiples

Durée : 1 heure 30

EXERCICE 1

Soit $\mathcal{D}$ le domaine délimité par le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(1,1)$.

1. Tracer le domaine $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé (O, I, J).
2. Calculer l'intégrale double suivante

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

EXERCICE 2

En utilisant les cordonnées cylindriques, calculer l'intégrale triple suivante

$$\iiint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

où $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2+y^2 \leq 9 \text{ et } -5 \leq z \leq 5\}$.

EXERCICE 3

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \iint_{\mathcal{D}} (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < y, \ 1 < xy < 3, \ y^2 - x^2 < 1\}$ en faisant un changement de variable adéquat.

1. Posons $u = xy$ et $v = y^2x^2$. Calculer l'image $\triangle = \varphi(\mathcal{D})$ où φ est la fonction $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u, v)$.
2. Exprimer x et y en fonction de u et v.
3. Calculer le Jacobien de φ.
4. Calculer l'intégrale I.

UNIVERSITÉ DES LAGUNES
ABIDJAN

Faculté des Sciences et Technologies

Licence 1 : Mathématiques Année : 2023-2024

Examen session 1 de : Intégrales multiples

Durée : 1 heure 30

EXERCICE 1

Soit $\mathcal{D}$ le domaine délimité par le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(1,1)$.

1. Tracer le domaine $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé (O, I, J).
2. Calculer l'intégrale double suivante

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

EXERCICE 2

En utilisant les cordonnées cylindriques, calculer l'intégrale triple suivante

$$\iiint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

où $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2+y^2 \leq 9 \text{ et } -5 \leq z \leq 5\}$.

EXERCICE 3

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \iint_{\mathcal{D}} (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x < y, \ 1 < xy < 3, \ y^2 - x^2 < 1\}$ en faisant un changement de variable adéquat.

1. Posons $u = xy$ et $v = y^2x^2$. Calculer l'image $\triangle = \varphi(\mathcal{D})$ où φ est la fonction $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (u,v)$.
2. Exprimer x et y en fonction de u et v.
3. Calculer le Jacobien de φ.
4. Calculer l'intégrale I.

Université des lagunes

UFR Sciences et techniques

Licence 2 : Maths-Info **Année Universitaire : 2023–2024**

Fiche N° 1 des Travaux dirigés d'Analyse 3

EXO 1 Etudier la nature des intégrales suivantes

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2\sqrt{1-t}}dt \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ln(\tan(t))dt \qquad \int_1^{+\infty} (1+\ln t)^{-\ln t}dt$$

$$\int_0^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{t}\right)dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t-1}dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)}dx$$

$$\int_0^{+\infty} \left(1+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}(1+t^2)}dt \qquad \int_0^{+\infty} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

EXO 2 Montrer que l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^3\ln t}{(1+t^4)^3}dt$ et l'intégrale $J=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}dt$ sont convergentes et calculer leur valeur.

EXO 3 Déterminer l'ensemble des couples $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x}+a\sin x+b\cos x}{x^2}dx$$

converge.

EXO 4 Étudier suivant les valeurs de α et β la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha+x^\beta}dx.$

EXO 5 Soit $\alpha>0$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}dx$ converge et que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{\alpha^2+x^2}dx=\frac{\pi\ln\alpha}{2\alpha}.$$

2. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\alpha\tan(x))dx.$

EXO 6 Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(e^{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}-1\right)dx.$

EXO 7

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x+\sin x}{x^2+1}dx$ est divergente.
2. Pour tout $x\geq1$, on pose $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x}$. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)dx$ convergente.
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}f(t)dt=0$ et calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{t+\sin t}{t^2+1}dt.$

Université des lagunes

Faculté de Sciences et Technologie

Licence 2 : Maths-Info **Année Universitaire : 2023–2024**

Fiche N° 4 des Travaux dirigés d'Analyse 3

EXO 1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^2} x^n$ **b.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} x^n$ **c.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\ln(1+\frac{1}{n})} \right)^n x^n$ **d.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^n x^n$

EXO 2 On considère la série entière $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière, de sa série dérivée et de sa série dérivée seconde.
2. Calculer la valeur de sa somme S.
3. En déduire la valeur de $I = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

EXO 3 a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière réelle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{ch}(n) x^n$$

puis calculer sa somme.

b) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière réelle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} x^{3n+1}.$$

Étudier la convergence de cette série pour $x = R$ et pour $x = -R$.

c) Soit a et b deux réels strictement positifs. Déterminer en fonction de a et b, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n+b^n} x^n$.

EXO 4 On considère la série entière réelle $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2+1}{n!} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. On note S la somme de la série entière sur $]-R, R[$. Déterminer pour tout $x \in]-R, R[$, $S(x)$.
3. Calculer $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+1)}{2^n n!}$.
4. Donner le développement en série entière de la fonction f définie par

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^x.$$

EXO 5 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire donnée par

$$f(0) = f(\pi) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, \pi[\; f(x) = 1.$$

1. Représenter graphiquement f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Donner l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in [-2\pi, 2\pi]$.
3. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? continue par morceaux sur $\mathbb{R}$? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$?
4. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
5. Écrire le développement en série de Fourier de f.
6. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
7. En déduire la valeur des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

8. En déduire la valeur de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

EXO 6 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, donnée par

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \; f(x) = x^2.$$

a) Représenter graphiquement f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
b) Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
c) Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
d) En déduire la valeur des séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

EXO 7 On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = x \sin \dfrac{x}{2}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f ?
3. Déterminer ls somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$.

EXO 8 On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de période 2π et impaire telle que

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \alpha, & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ 0, & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } t = \pi \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$ pour $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ puis pour $\alpha = \pi$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Montrer que :

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{(-1)^{n-1}\alpha}{2n-1}\right]$$

4. En déduire la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

UNIVERSITE DES LAGUNES **ANNEE 2023-2024**

LICENCE 2 MATHS APPLIQUEES **ANALYSE NUMERIQUE**

EXAMEN PREMIERE SESSION

DUREE 02H

Exercice 1 :

1) Construire le polynôme de Lagrange P qui interpole les trois points

$$(-1, e),\ (0, 1),\ (1, e).$$

2) Sans faire de calculs, donner l'expression du polynôme de Lagrange Q qui interpole les trois points

$$(-1, -1),\ (0, 0),\ (1, -1).$$

Exercice 2 : On considère l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$$

1) Évaluer cette intégrale par la méthode des trapèzes avec $n = 3$ sous-intervalles.

2) Pourquoi la valeur obtenue à la question précédente est-elle supérieure à la valeur exacte ? Est-ce vrai quelque soit n ? Justifier la réponse. (On pourra s'aider par un dessin.)

Exercice 3 : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = exp(x^2) - 4x^2.$$

On se propose de trouver les racines réelles de f.

1) Situer les 4 racines de f
(i.e. indiquer 4 intervalles disjoints qui contiennent chacun une et une seule racine).

2) Montrer qu'il y a une racine α comprise entre 0 et 1.

3) Soit la méthode de point fixe

$$(1) \begin{cases} x_0 \in]0, 1[\\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

avec g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{\sqrt{exp(x^2)}}{2}.$$

Examiner la convergence de cette méthode et en préciser l'ordre de convergence.

4) Écrire la méthode de Newton pour la recherche des zéros de la fonction f.

5) Entre la méthode de Newton et la méthode de point fixe (1), quelle est la plus efficace ? Justifier la réponse.

Exercice 1 06 points ; exercice 2 06 points ; exercice 3 08 points.

BONNE CHANCE.

Merci !! peace and love !

Année Universitaire
2023/2024

Statistique inferentielle
Durée: 2 heure 00
Documents non autorisés
Session 1

Exercice 1 On dipsose d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon issu d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

(1) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\lambda}_n$ de λ.
(2) Montrer $\widehat{\lambda}_n$ est une statistique exhaustive.
(3) Montrer $\widehat{\lambda}_n$ est efficace.
(4) On désire estimer $e^{-\lambda}$.
   (a) Interprèter comme la probabilité d'un évènement.
   (b) Montrer que $e^{-\widehat{\lambda}_n}$ est un estimateur convergent de $e^{-\lambda}$.
   (c) Montrer que $e^{-\widehat{\lambda}_n}$ est un estimateur asymptotiquement normal de $e^{-\lambda}$.

Exercice 2 On s'intéresse sur un site donné à la concentration d'un polluant métallique que l'on note X $(\mu g/g)$ mesurée dans des sédiments. On suppose que la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$ où le paramètre $\sigma_0 = 100$ est connu. On dispose d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de taille $n = 100$.

(1) On s'intéresse à l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ.
   (a) Déterminer l'estimateur $\widehat{\mu}_n$ de μ par la méthode du maximum de vraisemblance.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de $\widehat{\mu}_n$. Qu'en déduisez-vous sur les qualités de cet estimateur?
   (c) Quelle est la loi de $\widehat{\mu}_n$?

(2) En fait ,on a des doutes sur la valeur de $\mu_0 = 50\ \mu g/g$. Sur un échantillon réalisé de taille $n = 100$, on a mesuré une concentration moyenne de $\overline{x} = 51.2\ \mu g/g$. Vérifier, au risque de 5%, si la valeur supposé de μ_0 est la bonne.

(3) Construire un intervalle de confiance de la moyenne μ au niveau 90%.

Exercice 3 La machine 1 a produit 96 pièces dont 12 défectueuses. La machine 2 a produit 55 pièces dont 10 défectueuses. Peut-on en conclure que la machine 1 est significativement plus performante que la machine 2 au niveau 0.05 ?

Exercice 4 La Société "Cauphy Gombo & Fils" désire lancer sur le marché un nouveau produit. Elle procède une étude de marché auprès des ménagères pour connaître les intentions d'achat de ce type de produit. Le dépouillement de l'enquête montre que 18% des ménages sont intéressés par ce produit.

(1) Sachant que l'échantillon comportait 2500 ménages, dans quel intervalle de confiance doit-on situer ce résultat, au seuil de confiance de 95% ?

(2) Quelle taille d'échantillon aurait-il fallu choisir pour réduire cet intervalle de moitié ?

UNIVERSITÉ
DES LAGUNES
ABIDJAN
IN VERITATE ET SAPIENTIA

Année académique 2023-2024

Licence 2
Mathématiques Appliquées
Devoir
Algorithmes et structures de données
Durée : 2h00
Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 : Questions de cours (6 Points)

1. Définir une structure de données.
2. Citer (02) deux structures de données.
3. Donner la syntaxe d'écriture de ces structures de données citées.
4. Que représente un nom logique pour un programme utilisant un fichier de données.

Exercice 2 : (6 Points)

1- Un étudiant de l'Université des Lagunes d'Abidjan est identifié par son matricule, son nom et prénoms, sa date de naissance, son sexe.
  a- Identifier les types
  b- Déclarer les types
  c- Déclarer l'ensemble des étudiants de l'UL
2- Ecrire un programme nommé "Classe" qui permet de stocker les informations concernant une classe : nom de la classe, l'ensemble des matières de la classes, l'ensemble des étudiants de la classe.

Exercice 3 : (8 Points)

1. Créez la structure nommée "Matière" qui permet de stocker les informations concernant une matière : nom matière, coefficient de la matière.
2. En vous inspirant du 1, créez la structure nommée "Matières" qui permet de stocker les informations concernant l'ensemble des matières d'une classe (15 maximum).
3. Ecrire un programme qui, après avoir renseigné la structure "Matières", permet de le stocker dans un fichier de matières sur le disque dur de l'ordinateur à l'adresse.

Amniv Emmanuel

TD de Probabilités L2

Exercice 1

On a melangé par inadvertance des graines de deux provenances différentes A et B. Les graines provenant de B sont deux fois plus que celles provenant de A. La moitié des graines de A et les trois quarts des graines de B sont noires. On choisit une graine au hasard ; elle est noire. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de A.

Exercice 2

On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obeissant aux règles suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- si l'appareil fonctionne au temps $n-1$, il a la probabilité $\frac{1}{4}$ d'être en panne au temps n.
- si l'appareil est en panne au temps $n-1$, il a la probabilité $\frac{1}{2}$ d'être en panne au temps n.

On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant n.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir une relation entre p_n et p_{n-1}. En déduire p_n en fonction de p_0.
2. Etudier la convergence de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

Trois coups sont successivement tirés sur une cible. Les probabilités d'atteinte de la cible sont respectivement 0.3 pour le 1er coup, 0.5 pour le 2ème et 0.7 pour le 3ème. La probabilité de destruction de la cible est 0.4 lorsqu'elle est touchée une seule fois, 0.8 lorsqu'elle est touchée 2 fois et 1 lorsqu'elle est touchée 3 fois.

1. Quelle est la probabilité que la cible soit détruite à l'issue des trois tirs ?
2. Après les trois tirs, on constate que la cible a été détruite. Quelle est la probabilité qu'elle ait été touchée une seule fois ?

Exercice 4

On effectue une série de tirages successifs avec remise dans une urne contenant des boules distinctes dont a rouges et b noires jusqu'à ce qu'on obtienne deux boules rouges. On note X le nombre de boules noires obtenues avant de tomber sur la deuxième boule rouge. On pose : $p = \dfrac{a}{a+b}$ et $q = \dfrac{b}{a+b}$.

1. Justifier que la loi de X est donnée par : $\forall k \in \mathbb{N};\ \mathbb{P}(X=k) = (k+1)q^k p^2$.
2. On appelle fonction génératrice associée à la variable aléatoire X la fonction de $s \in [-1,1]$ définie par $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X=k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} s^k \mathbb{P}(X=k)$. Montrer que $G(s) = \left(\dfrac{p}{1-qs}\right)^2$
3. Montrer que l'espérance de X, $\mathbb{E}(X)$ est égale à $G'(1)$. En déduire $\mathbb{E}(X)$.
4. En calculant $G''(1)$, déterminer la variance de X.
5. Quelle est la probabilité que l'on obtienne au moins k_0 boules noires avant de tomber sur une boule rouge ? Faites l'application numérique pour $a=2$, $b=3$ et $k_0=3$

   (Remarque : on peut dériver la série)

Exercice 5

Un mobile évolue de façon aléatoire le long d'un axe gradué. A $t = 0$, il est en 0 ; à chaque instant entier $t = k$, $(k \geq 0)$, son abscisse varie de $+1$ avec la probabilité p et de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$. On note X_n son abscisse au temps $t = n$.

1. Montrer que les valeurs prises par X_n sont les entiers relatifs $2k - n$, avec $(0 \leq k \leq n)$. Puis, calculer $\mathbb{P}(X_n = 2k - n)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathrm{Var}(X_n)$.

Exercice 6

On considère la fonction F définie par : $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle continue X absolument continue et déterminer sa densité.
2. Calculer $\mathbb{P}(X < 1,5)$, $\mathbb{P}(0,5 < X \leq 1,5)$.

Exercice 7

Dans une population, on définit la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par la densité de probabilité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = X^2$.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 8

On observe l'arrivée de personnes à un guichet, elles se font servir puis s'en vont, plus d'une personnes ne pouvant arriver à la fois. Les arrivées se produisent indépendamment les unes des autres. Notons λ le taux d'arrivée des clients au guichet (i.e. λ est le nombre moyen d'arrivées par unité de temps). On désigne par N_t le nombre d'arrivées dans un intervalle de temps de longueur t.

1. Justifier que la variable aléatoire N_t est distribuée selon une loi de Poisson de paramètre λt.
2. On note X_1 l'instant d'arrivée du premier client. Déterminer $\mathbb{P}(X_1 > t)$ pour tout réel t. En déduire la loi de X_1, puis $\mathbb{E}(X_1)$ et $V(X_1)$.
3. On note X_n l'instant d'arrivée du n-ième client $(n \geq 1)$.
   (a) Montrer que pour tout $t > 0$, $F_{X_n}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$. En déduire une densité de X_n.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $V(X_n)$.

Exercice 9

Le central téléphonique de la société X reçoit en moyenne 180 appels par heure. On suppose que le nombre d'appels pendant un intervalle de temps quelconque suit une loi de Poisson.

1. Calculer la probabilité pour que, durant trois minutes, le central reçoive exactement cinq appels.
2. Calculer la probabilité que vous attendez plus de 2 minutes pour recevoir le premier appel.
3. Vous attendez depuis une minute sans appel. Quelle est la probabilité que vous devriez attendre encore 2 minutes pour recevoir le premier appel à partir de maintenant ? Conclusion.
4. Quelle est le temps moyen d'attente pour recevoir le premier appel ? Et la variance de ce temps d'attente ?
5. Calculer la probabilité pour que l'intervalle de temps séparant le premier et le dernier de ces cinq appels soit inférieure à trois minutes.

Exercice 10 X

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi conjointe :

$$p_{(X,Y)}(i,j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{c}{2^{i+j}}, \quad i, j \geq 1.$$

1. Déterminer c.
2. Donner les lois marginales de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = i$, avec $i \geq 1$, puis en déduire $\mathbb{E}(Y|X)$.
4. Calculer l'espérance et la matrice de dispersion du couple(X, Y).
5. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X = Y)$, $\mathbb{P}(X > Y)$, $\mathbb{P}(X < Y)$.
6. On pose $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.
   (a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(U \leq k)$. En déduire la loi et l'espérance de U.
   (b) Adopter un raisonnement analogue pour la loi et l'espérance de V.

Exercice 11 X

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$.

1. Donner la densité et la fonction de repartition du couple (X, Y). Puis calculer $\mathbb{P}(2X < Y)$.
2. Déterminer l'espérance et la matrice de covariance du couple (X, Y).
3. (a) On pose $S = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$. Déterminer la densité de S et de T.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de S et de T.
4. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.
   (a) Déterminer l'espérance et la matrice de covariance du couple (U, V).
   (b) Déterminer la densité conjointe du couple (U, V). Puis, en déduire les lois marginales.
   (c) Déterminer la loi conditionnelle de U sachant $V = v$. En déduire $\mathbb{E}(U|V)$.

Exercice 12 X

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de densité conjointe :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha(y-x)^2 e^{-2y}, & \text{si } 0 < x < y \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de la constante α.
2. Calculer les densités marginales f_X et f_Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathbb{P}(X > \frac{1}{2}, Y < 1)$.
3. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $Y = 1$. Calculer $\mathbb{E}(X|Y = 1)$
4. On pose $U = Y - X$ et $V = \frac{X}{Y}$. Déterminer la densité conjointe du couple (U, V). Les variable aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
5. On note respectivement $e(X)$ et $d(X)$ la partie entière et la partie décimale de X, i.e., $(e(X), d(X))$ est l'unique couple, élément de $\mathbb{N} \times [0, 1[$ tel que $X = e(X) + d(X)$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(e(X) = k, d(X) \leq u)$. En déduire les lois de $e(X)$ et $d(X)$. x
   (b) Les variable aléatoire $e(X)$ et $d(X)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 13 X

La production de pièces métalliques est assurée par deux usines (A et B). L'usine A produit cinq fois plus de pièces que l'usine B. On sait aussi qu'une pièce sur six, produite par l'usine A, est dorée et les deux tiers des pièces produites par l'usine B, sont dorées.

1. Quelle est la proportion de pièces dorées dans la production ?
2. Quelle est la probabilité qu'une pièce dorée provienne de l'usine A ?
3. Un revendeur reçoit un carton de 25000 pièces métalliques. Il procède à un contrôle : il prélève un lot de 2000 pièces du carton. On note X le nombre de pièces dorées prélèvées.
   (a) Donner la loi de X, puis calculer son espérance et sa variance.
   (b) Quelle est la probabilité qu'il ait au plus 525 pièces dorées dans le lot tiré ?

Exercice 14

Soit $(X_n)_{n>0}$ une suite de variables aléatoires telles que X_n suit une loi uniforme sur $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}\right\}$.
Montrer que $(X_n)_{n>0}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on déterminera la loi.

Exercice 15

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d à une loi de poisson $\mathcal{P}(1)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer la loi de S_n. En déduire $\mathbb{P}(S_n \leq n)$.
2. En appliquant le théorème central limite à S_n, démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \left(e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \right) = \frac{1}{2}$.
3. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|S_n - n| > n\varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$. En déduire que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine X dont on déterminera la loi.

UNIVERSITE DES LAGUNES D'ABIDJAN **ANNEE 2023-2024**

LICENCE 2/LST

EVALUATION COMPTABILITE FINANCIERE

Durée 02 Heures

<u>Première partie</u> : QCM (6 points)

Définissez les concepts suivants :

1. Amortissement comptable
2. Amortissement fiscal
3. Amortissement dérogatoire

4- Provision réglementée

<u>Deuxième partie</u> : Exercice

Dans le but d'être plus efficace et plus rapide dans les tirages des sujets lors des grands examens de fin d'année, l'Université des Lagunes a acquis une photocopieuse de dernière génération payée par virement bancaire et mis en service le 15/04/2023. La durée d'utilisation prévue est de 5 ans.

Les éléments de la facture sont les suivants :

Photocopieuse HT 7 000 000, première remise 10 %, deuxième remise 5%, l'escompte 1%, Frais d'installation HT 750 000, port payé à 500 000. Le taux de TVA est 18%, la TVA est déductible à hauteur de 60%

Sa valeur résiduelle s'élève à 500 000

TAF :

1. Présenter la facture n°016/23
2. Passer les écritures d'acquisition
3. Présenter le plan d'amortissement dégressif

UNIVERSITE DES LAGUNES 2023-2024

LICENCE 2 MATHEMATIQUES APPLIQUEES

CALCUL NUMERIQUE DEVOIR DUREE 2H

EXERCICE 1 8 pts

Soit la fonction $f(x) = 1 - 3\exp(-x), x \in \mathbb{R}$

1. *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *a une unique racine* α *qu'on localisera dans un intervalle* I *entre deux entiers consécutifs.*
2. *Appliquer à* $f(x)$ *la méthode de Newton pour trouver* α.
3. *Sur quelle fonction définit-on les itérations du point fixe ?*
4. *Calculer* α *avec la méthode de point fixe.*
5. *Calculer* α *avec la méthode de dichotomie.*
6. *Calculer* α *avec la méthode de Newton.*
   Tous les calculs se font à la précision $\epsilon = 10^{-3}$.

EXERCICE 2 4 pts

Estimer $\sqrt{10}$, *en utilisant la méthode de la sécante avec une tolérance de* 10^{-4}.

EXERCICE 3 3 pts

On considère $f(x) = \sqrt[3]{x}$ que l'on souhaite interpoler aux points $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 8$ et $x_3 = 27$.

1. En utilisant les différences divisées construire, pour $i = 0 \dots 3$, p_i, le polynôme d'interpolation de degré i interpolant f aux points $(x_j)_{j \leq i}$.
2. Evaluer $p_i(20)$ et comparer à $f(20)$.
3. Ecrire le reste de l'interpolation dans ce cas. Que se passe-t-il?
4. Construire q_3 le polynôme de degré 3 interpolant f aux points $(x_i)_{i=1\dots3}$ et calculer $q_3(20)$.
5. Ecrire le reste de l'interpolation dans ce cas. Que peut-on dire?

Université des Lagunes/ Année universitaire 2023-2024

Licence 2 Maths Appliquées
Durée: 1 h 45 mn
NB: la clarté de la rédaction sera notée!

EXAMEN - Session 1
(Algèbre Bilinéaire)

Exercice 1 (8 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice réelle, symétrique $M_a = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$.

On note $\psi_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est M_a.

1) Pour quelles valeurs de a la forme ψ_a est-elle dégénérée?

2) Déterminer la forme quadratique q_a associée à ψ_a.

3) Déterminer la signature de q_a. Préciser les valeurs de a pour lesquelles ψ_a est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (12 points)

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, et de degré ≤ 2.

On note $\mathcal{B} = (P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2)$ la base canonique de E.

1) Justifier que, pour tout $P \in E$, la fonction $x \longmapsto e^{-x}P(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2) Montrer que l'application φ définie sur $E \times E$ par

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x)\, Q(x)dx$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E.

3) Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ de E.

4) Montrer que φ est positive et non-dégénérée.

On considère les vecteurs

$$T_1 = X - 1, \quad T_2 = X^2 + 1$$

5) Déterminer l'orthogonal par φ du sous-espace vectoriel $F = < T_1, T_2 >$ de E engendré par T_1, T_2.

Université des lagunes
Faculté des sciences et technologies

Année Universitaire : 2023/2024
Licence 2 : Maths & Info

– **Contrôle n° 1 Topologie dans $\mathbb{R}^n$** – – **Durée : 1 heure 30** –

Exercice 1

1. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer $]a, b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$.
   En déduire que $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble $]-\infty, 1] \cup [7, +\infty[$ est-il ouvert ? fermé ? borné ? compact dans $\mathbb{R}$?
3. L'ensemble $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\}$ est-il ouvert ? fermé ? borné ? compact dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 :

Déterminer si les applications suivantes sont des normes $\mathbb{R}^2$?

1. $N_1 : (x_1, x_2) \mapsto \max(|2x_1|, |x_2 - x_1|)$.
2. $N_2 : (x_1, x_2) \mapsto |x_1|^3 + |x_2|$.

Exercice 3 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que si x et y sont des réels, on a :

$$2|xy| \leq x^2 + y^2.$$

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Étudier l'existence des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
4. Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

UNIVERSITÉ
DES LAGUNES
ABIDJAN

Faculté des Sciences et Technologie
Licence 1 — Année : 2022–2023

CONTROLE CONTINU D'ANALYSE 1

ECUE 2 : Fonctions de la variable réelle

Durée : 1 heure 45 minutes

EXERCICE 1

1. Formuler le théorème de Rolle.
2. Formuler le théorème des accroissements finis.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(1) = 7$ et $f(5) = 19$. Démontrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 3$.

EXERCICE 2

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sin(2x)}{1 - \sqrt{\cos(x)}}$.

b) $\lim\limits_{x \to 1/2} (2x^2 - 3x + 1)\tan(\pi x)$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}E(x)$.

EXERCICE 3

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Que vaut $f'(0)$? Calculer pour tout $x \neq 0$, $f'(x)$.
4. La fonction f' est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

EXERCICE 4

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2x + \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée g' de g.
2. Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Calculer $g(2\pi)$, $g^{-1}(4\pi)$ et $(g^{-1})'(4\pi)$

Bonne chance!

Merci !

UNIVERSITÉ DES LAGUNES
ABIDJAN

Faculté des Sciences et Technologie

Licence 1 Année : 2022–2023

EXAMEN D'ANALYSE 1 (session 1)

ECUE 1 : Suites numériques

Durée : 1 heure 45 minutes

EXERCICE 1

Soit A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Que signifie que A est un intervalle de $\mathbb{R}$?
2. Que signifie que A est dense dans $\mathbb{R}$?
3. Que signifie que A est bornée dans $\mathbb{R}$?

EXERCICE 2

On pose $A = \left\{ \dfrac{n(-1)^n + 1}{2n + (-1)^n} \; ; \; n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. Montrer que $A = \left\{ \dfrac{2n+1}{4n+1} \; ; \; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \dfrac{-2n}{4n+1} \; ; \; n \in \mathbb{N} \right\}$.
2. Déterminer lorsqu'elles existent la borne supérieure,la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de A.

EXERCICE 3

Soient x et y des réels tels que $1 < x < 4$ et $-4 < y < -3$. Lequel des encadrements ci-dessous est-il vrai ? Justifier.

1. $-4 < \dfrac{x}{y} < 0$
2. $-4 < \dfrac{x}{y} < -1$
3. $-3 < \dfrac{x}{y} < -4$
4. $-\dfrac{1}{4} < \dfrac{x}{y} < -\dfrac{4}{3}$

EXERCICE 4

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

1. Montrer que pour tout entier k non nul, on a
$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \sqrt{k} - \sqrt{k-1}.$$
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
3. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

Bonne chance !

Faculté des Sciences et Technologie

Licence 1 Année : 2022-2023

CONTROLE CONTINU D'ANALYSE 1

ECUE 1 : Suites numériques

Durée : 1 heure 45 minutes

UNIVERSITÉ DES LAGUNES ABIDJAN

EXERCICE 1

1. Soit A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
   (a) Qu'est-ce qu'un minorant de A ?
   (b) Quand dit-on que A est une partie minorée ?
   (c) Quand dit-on que A possède une borne inférieure ?
   (d) Quand dit-on que A possède un minimum ?
2. Quand dit-on que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes ?
3. Soit x un nombre réel. Donner la définition de la partie entière $\mathrm{E}(x)$ de x. Puis montrer que pour tous réels x et y tels que $x < y$, on a $\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(y)$.
4. Rappeler l'inégalité triangulaire. Puis montrer que pour tous réels a et b, on a : $|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$.
5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+5n}{5n^3+\sin n+\frac{1}{n^2}}$.

EXERCICE 2

Soit $A = \left\{1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Prouver l'ensemble A est minoré et majoré.
2. Montrer que $A = \left\{1 - \dfrac{1}{2n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{1 + \dfrac{1}{2n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$.
3. Déterminer lorsqu'elles existent la borne supérieure,la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de A.

EXERCICE 3

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \text{ et } v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

1. Calculer u_1, u_2, v_3 et v_4.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Bonne chance !

Merci

Université des Lagunes
Département de Mathématiques

Année
2022-2023

EXAMEN
U.E. : ANALYSE 2
Première Session
Licence 1
Durée 2H

EXERCICE 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}dx \quad ; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{-x}+1}dx \quad ; \quad I_3 = \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx.$$

EXERCICE 2

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a;\, b]$ à valeurs réelles.

1. Montrer que si $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors il existe $c \in [a;\, b]$ tel que $f(c) = 0$ (On appliquera le théorème de Rolle à une application que l'on précisera).
2. Montrer que si f est positive sur $[a;\, b]$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $f(x) = 0, \quad \forall x \in [a;\, b]$.
3. Montrer que
$$\left(\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|\, dx\right) \iff (f \text{ est de signe constant sur } \mathbb{R}).$$
4. Supposons que $a = 0$ et $b = 1$. Montrer que
$$\left(\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\right) \implies \left(\exists c \in]0;\, 1[\text{ tel que } f(c) = \frac{1}{2}\right).$$

EXERCICE 3

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+4}}.$$

1. Montrer que F est une fonction impaire.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $F'(x)$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et déterminer le signe de F' sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a :
$$0 \le F(x) \le \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+4}}.$$
4. Déduire de ce qui précède que F est bornée sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4

Intégrer les équations differentielles suivantes :

1. $(x^2+1)y' - 2y = -2\sqrt{y}$.
2. $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

$-(\arctan x)'$